Rezolvarea testului de evaluare națională ce a fost susținut de elevii claselor a VIII-a în data de 22. iunie. 2011 la proba scrisă „Matematică"

Subiectul 1

① $6+16:4=6+4=10$

② 7 bile albe

3 bile albastre

probabilitatea ca o bilă extrasă să fie albastră este

$p=\dfrac{\text{nr. cazurilor favorabile}}{\text{nr. cazurilor posibile}}=\dfrac{3}{3+7}=\dfrac{3}{10}=\dfrac{30}{100}$

$p=30\%$

③ 3 kg mere .... 7,5 lei

4 kg mere .... x lei

$\dfrac{3}{4}=\dfrac{7,5}{x}\Rightarrow x=\dfrac{4\cdot 7,5}{3}=4\cdot 2,5=10$

4 kg de mere costă 10 lei

④ lungimea dreptunghi $L=8\,cm$

lățimea dreptunghi $l=\dfrac{3}{4}\cdot L=\dfrac{3}{4}\cdot 8\,cm$

$\Rightarrow \boxed{l=6\,cm}$

⑤ Prisma triunghiulară $ABCA'B'C'$ are fețele laterale pătrate $\Rightarrow AB\equiv BC\equiv CA\equiv A'B'\equiv B'C'\equiv C'A'\equiv AA'\equiv BB'\equiv CC'\Rightarrow$ bazele ABC și $A'B'C'$ sunt triunghiuri echilaterale.

$$\left.\begin{array}{l} CC' \parallel AA' \Rightarrow m(\widehat{CC', AB'}) = m(\widehat{AA', AB'}) = \alpha^\circ \\ AA' \text{ și } AB' \text{ sunt două drepte din același plan} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^\circ = m(\widehat{A'AB'}) \\ ABB'A' = \text{pătrat și știm că diagonala într-un} \\ \text{pătrat este și bisectoarea unghiului drept} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha^\circ = 45^\circ}$$

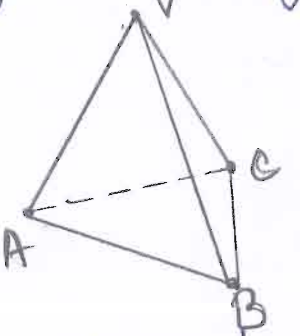
6) Din tabelul dat, se face suma dintre numărul elevilor care au obținut notă mai mică decât 7:

$x = 8 + 12 + 25 = 45$ (elevi).

<u>Subiectul 2</u>

1) Desenați o piramidă triunghiulară regulată de vârf V și bază ABC.

$AB \equiv BC \equiv CA$



2) Determinați perechile de numere naturale (a,b) pentru care are loc egalitatea: $\frac{a-1}{2} = \frac{3}{b+1}$

$\Leftrightarrow (a-1)\cdot(b+1) = 6$

$$\text{Condiții} \begin{cases} a \in \mathbb{N} \Rightarrow (a-1) \in \mathbb{N} \cup \{-1\} \\ b \in \mathbb{N} \Rightarrow (b+1) \in \mathbb{N}^* \\ 6 > 0 \Rightarrow (a-1) > 0 \Rightarrow (a-1) \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

$(a-1)$ și $(b+1)$ pot fi doar elemente ale mulțimii divizorilor lui 6 cu condiția suplimentară ca produsul lor să fie 6.

$$\begin{cases} \text{mulțimea divizorilor lui 6 este } D_6 = \{1;2;3;6\} \\ (a-1) \in D_6 \\ (b+1) \in D_6 \\ (a-1)\cdot(b+1) = 6 \end{cases}$$

fie $(a-1)=1 \Rightarrow \boxed{a=2}$

$\Rightarrow (b+1) = \frac{6}{1} \Rightarrow \boxed{b=5}$

fie $(a-1)=2 \Rightarrow \boxed{a=3}$

$\Rightarrow (b+1) = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow \boxed{b=2}$

fie $(a-1)=3 \Rightarrow \boxed{a=4}$

$\Rightarrow (b+1) = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow \boxed{b=1}$

fie $(a-1)=6 \Rightarrow \boxed{a=7}$

$\Rightarrow (b+1) = \frac{6}{6} = 1 \Rightarrow \boxed{b=0}$

Perechile de numere naturale $(a;b)$ care respectă condiția din enunțul problemei, pot fi următoarele $(a;b) \in \{(2;5);(3;2);(4;1);(7;0)\}$

③ Fie x = prețul inițial al televizorului

$$\begin{cases} x + x \cdot 10\% = y\ ; \\ y - y \cdot 10\% = 1980 \text{ lei} \end{cases} \Rightarrow y \cdot 90\% = 1980 \text{ lei}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1980 \text{ lei}}{90\%}}$$

$$x \cdot 110\% = \frac{1980 \text{ lei}}{90\%} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1980 \text{ lei}}{90\% \cdot 110\%}}$$

$$x = \frac{1980 \text{ lei}}{\frac{90}{100} \cdot \frac{110}{100}} = \frac{1980 \text{ lei}}{\frac{9}{10} \cdot \frac{11}{10}} = \frac{198000 \text{ lei}}{99} = 2000 \text{ lei}$$

$$\boxed{x = 2000 \text{ lei}}$$

4) Se consideră funcția:
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = -x + 2$

a) reprezentați grafic funcția f
b) determinați coordonatele punctului care are abscisa egală cu ordonata și aparține graficului f.

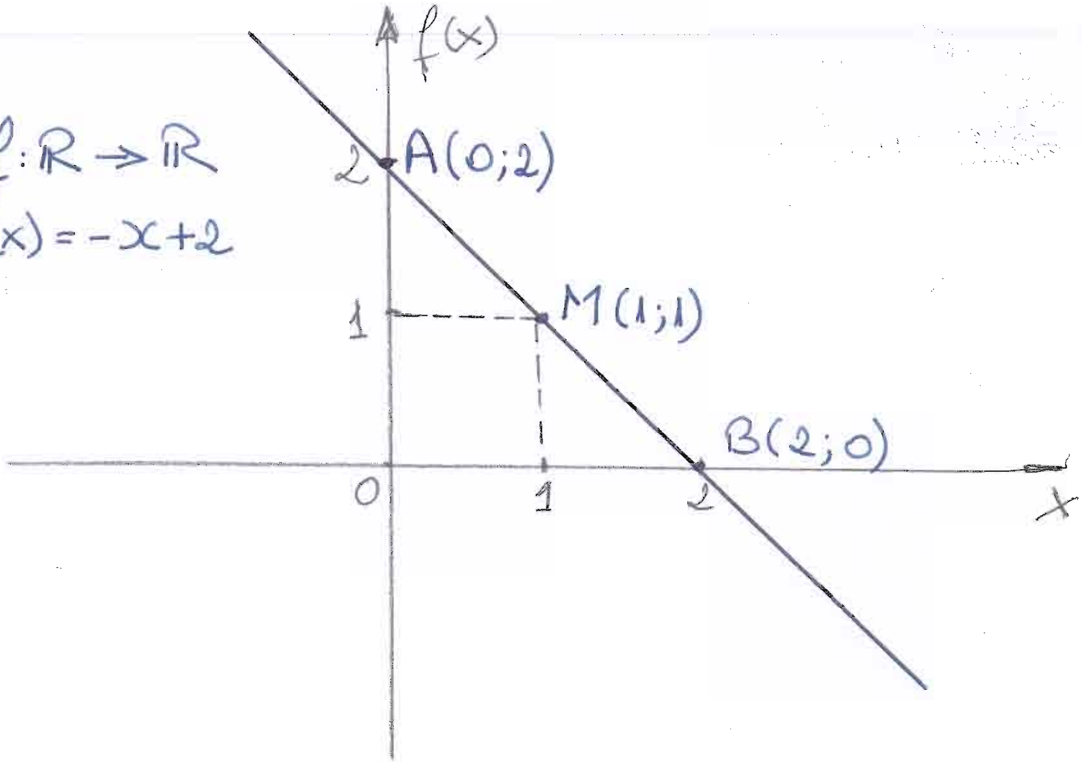
a) fie $x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = -0 + 2 = 2$
Graficul funcției va trece prin punctul $A(x_0; y_0)$ unde $x_0 = 0$ și $y_0 = f(x_0) = 2$

fie $x_1 = 2 \Rightarrow f(x_1) = -2 + 2 = 0$
Graficul funcției va trece prin punctul $B(x_1; y_1)$ unde $x_1 = 2$ și $y_1 = f(x_1) = 0$

Deoarece graficul unei funcții de gradul I este o dreaptă, graficul funcției date mai sus coincide cu dreapta AB.

b) fie punctul M pentru care abscisa este egală cu ordonata. Dacă punctul M are coordonate $(x_2; y_2)$ și $f(x_2) = y_2 = x_2 \Rightarrow -x_2 + 2 = x_2$
$\Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = f(x_2) = 1 \Rightarrow M(1; 1)$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$f(x)=-x+2$



⑥ Arătați că următorul număr a, este natural:

$a=(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot(5-\sqrt{6})+(\sqrt{2}-1)^2-3\sqrt{3}$
$a=5\cdot\sqrt{3}-\sqrt{3}\sqrt{6}+5\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}+(\sqrt{2})^2-2\cdot\sqrt{2}+1-3\sqrt{3}$
$a=5\cdot\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+5\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+2-2\cdot\sqrt{2}+1-3\sqrt{3}$
$a=5\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{2}+5\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{3}+2-2\cdot\sqrt{2}+1-3\cdot\sqrt{3}$
$a=\sqrt{3}\cdot(5-2-3)+\sqrt{2}\cdot(-3+5-2)+2+1$
$a=\sqrt{3}\cdot 0+\sqrt{2}\cdot 0+3$

$\left.\begin{array}{l} a=3 \\ 3\in\mathbb{N}\end{array}\right\}\Rightarrow$ a este un număr natural

Subiectul 3

Problema 1: ABCDA'B'C'D' - prismă patrulateră dreaptă
ABCD = pătrat
$AB=30\,cm$
$AC=CC'$
$AP=90\,cm$

a) $AA'=?$

ΔABC = triunghi dreptunghic cu $m(\widehat{ABC})=90^\circ$

$\Rightarrow$ Aplicăm teorema lui Pitagora $\Rightarrow$

$\begin{cases} AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{AB^2+BC^2} \\ AB = l = 30\,cm \\ BC = l = 30\,cm \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{AC = l\cdot\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$ numeric $\boxed{AC = 30\cdot\sqrt{2}\ cm}$

$\begin{cases} CC' = AC \Rightarrow CC' = l\sqrt{2} \\ CC' = AA' \text{ (deoarece prisma este dreaptă)} \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{AA' = 30\sqrt{2}\ cm}$

b) $m(\widehat{AP;(ABC)}) = ?$

AC reprezintă proiectia lui AC' pe planul (ABC)

$\Rightarrow m(\widehat{AP;(ABC)}) = m(\widehat{C'AC})$

$\left.\begin{array}{l} AC \equiv C'C \\ \text{triunghiul } C'CA = \text{dreptunghic în } C \end{array}\right\} \Rightarrow$

triunghi $C'CA$ dreptunghic și isoscel $\Rightarrow m(\widehat{C'AC}) = 45^\circ$

$\Rightarrow \boxed{m(\widehat{AP;(ABC)}) = 45^\circ}$

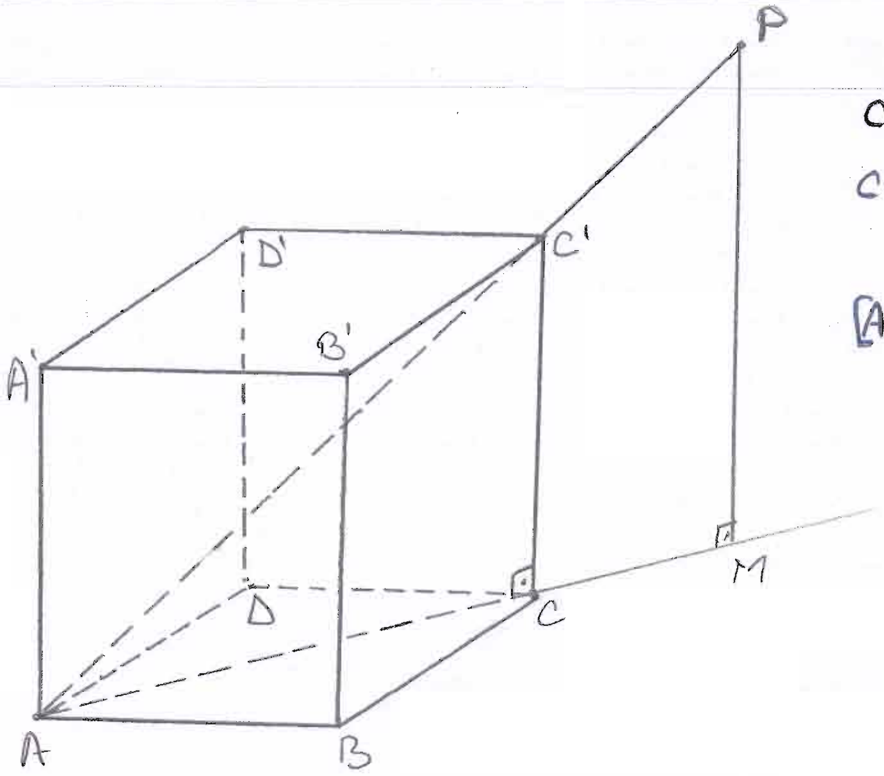
c) Fie M = proiectia punctului P pe planul ABC.

ΔAMP = Δ dreptunghic în M

Punctele A, C', P = coliniare $\Rightarrow$ proiectiile lor pe planul ABC sunt coliniare $\Rightarrow$ A, C, M coliniare

$\Rightarrow m(\widehat{PAM}) = 45^\circ$

$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin \widehat{PAM} = \frac{PM}{AP}$ $\Rightarrow \boxed{PM = AP\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}$



$CC' \perp (ABCD)$

$CC' \perp AC$

$[AM]$ = proiecția lui $[AP]$ pe $(ABCD)$

$\Rightarrow \boxed{PM = 45\sqrt{2} \text{ cm}}$ (distanța de la P la planul (ABC))

Problema 2

ABCD = dreptunghi

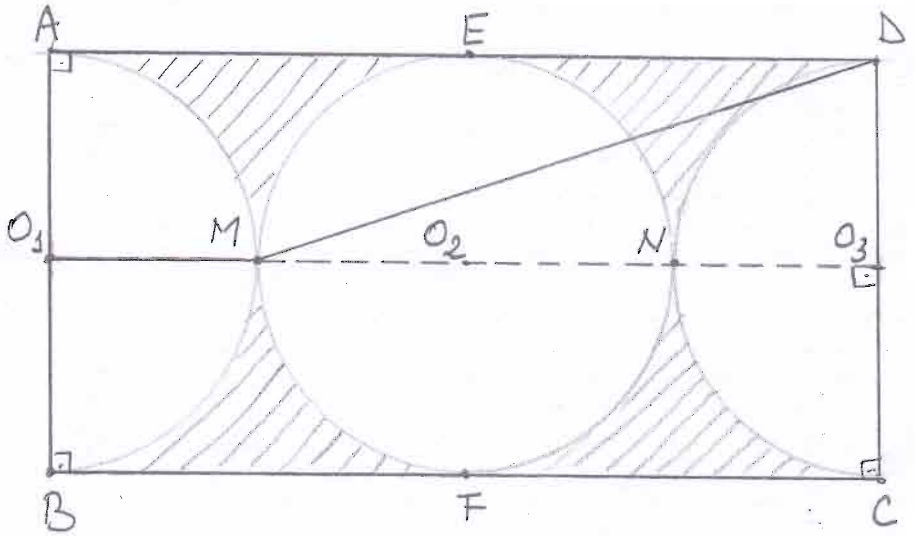
cercul și semicercurile au aceeași rază $r = AB/2$

$AB = 16$ m

a) $O_1M + MD = ?$

b) Aria (semicerc 1 + cerc + semicerc 2) = ?

c) Aria(hașurată) < 111 m^2



$O_1M = O_2M = O_2N = O_3N = r = AB/2$

a) $r = 8\,m$ (deoarece $r = AB/2$)

$O_1M = r \Rightarrow O_1M = 8m$

$M\Delta$ îl calculăm utilizând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic $MO_3\Delta$

$$\left.\begin{array}{l} M\Delta^2 = MO_3^2 + O_3\Delta^2 \\ MO_3 = 3\cdot r \\ O_3\Delta = r \end{array}\right\} \Rightarrow M\Delta^2 = 9\cdot r^2 + r^2 \Rightarrow M\Delta = r\cdot\sqrt{10}$$

$O_1M + M\Delta = r + r\cdot\sqrt{10}$

$O_1M + M\Delta = r(1+\sqrt{10})$

Numeric:

$\boxed{O_1M + M\Delta = 8(1+\sqrt{10})\,m}$ (distanța parcursă de albină)

b) $Aria_{semicerc_1} + Aria_{cerc_2} + Aria_{semicerc_3} = S =$

$= \frac{1}{2}(\pi\cdot r^2) + \pi\cdot r^2 + \frac{1}{2}(\pi\cdot r^2) =$

$= 2\cdot\pi\cdot r^2$

$\Rightarrow \boxed{S = 2\cdot\pi\cdot r^2}$

Numeric: (aproximăm $\pi = 3,14$) $\Rightarrow S = 128\cdot\pi\ (m^2)$

$S = 2\cdot 3,14\cdot(8m)^2$

$\boxed{S = 401,92\ m^2}$

c) $Aria(hașurată) = Aria_{(ABCD)} - S$

$$\left.\begin{array}{l} ABCD = \text{dreptunghi} \Rightarrow Aria_{ABCD} = AB \cdot BC \\ \text{Din figură} \Rightarrow AB = 2 \cdot r \text{ și } BC = 4 \cdot r \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Aria_{ABCD} = 8 \cdot r^2 \Rightarrow Aria_{hașurată} = 8 \cdot r^2 - 2\pi \cdot r^2$$

$$\Rightarrow \boxed{Aria_{hașurată} = 2 \cdot r^2 (4 - \pi)}$$

Numeric:

$$\pi > 3,14 \quad | \cdot (-1)$$
$$-\pi < -3,14 \quad | +4$$
$$(4 - \pi) < (4 - 3,14) \quad | \cdot 2r^2$$
$$2 \cdot r^2 (4 - \pi) < 2r^2 \cdot (4 - 3,14)$$
$$Aria_{hasurată} < 2 \cdot r^2 \cdot (4 - 3,14) = 2 \cdot 64 \cdot 0,86 \ m^2$$

$$Aria_{hasurată} < 110,08 \ m^2 < 111 \ m^2$$

$$\boxed{Aria_{hașurată} < 111 \ m^2}$$