Rezolvarea testului de evaluare națională ce a fost susținut de elevii claselor a VIII-a în data de 27 iunie 2012 la proba scrisă „Matematica".

Subiectul 1

① $12 + 12 : 4 = 12 + 3 = 15$

② $m_a = \frac{7+23}{2} = \frac{30}{2} = 15$

③ $A = \{x \in \mathbb{R} / 2 \cdot x \leq 4\} = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2\} = (-\infty; 2]$

④ $l = 4\text{ cm}$ (latura unui romb) $\Rightarrow$ perimetrul p
$p = 4 \cdot l \Rightarrow$ numeric $p = 4 \cdot (4\text{cm}) \Rightarrow p = 16\text{ cm}$

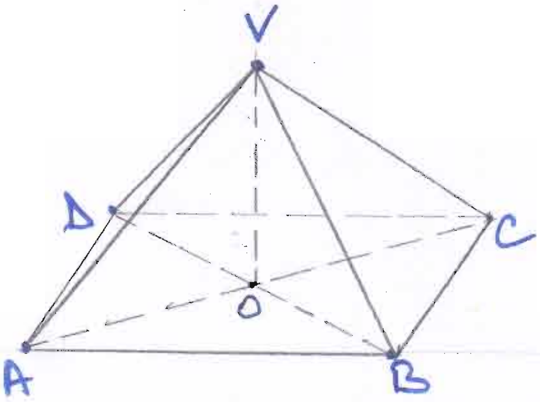
⑤ $m = 5\text{cm}$ (lungimea muchiei unui cub) $\Rightarrow$
aria totala A este:
$A = 6 \cdot m^2 \Rightarrow$ numeric $A = 6 \cdot (5\text{cm})^2 \Rightarrow A = 150\text{ cm}^2$

⑥ notăm cu x = nr. total al elevilor ce au obținut cel puțin nota 8 la test $\Rightarrow$ din diagrama dată $\Rightarrow$
$\Rightarrow x = 5 + 4 + 3 \Rightarrow x = 12$

Subiectul 2

① VABCD = piramidă patrulateră regulată
V = vârful
ABCD = baza

$AB = BC = CD = CA$
$AC \cap BD = \{O\}$
$VO \perp (ABCD)$



② Notăm cu m_g = media geometrică a numerelor a și b

$$\begin{cases} m_g = \sqrt{a \cdot b} \\ a = \dfrac{4}{\sqrt{5}+1} \\ b = \sqrt{15} : \sqrt{3} + 1 = \sqrt{15:3} + 1 = \sqrt{5} + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m_g = \sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{5}+1}\right) \cdot (\sqrt{5}+1)} = \sqrt{4} \Rightarrow m_g = 2$$

③ Notăm cu x = numărul de băieți din clasă
y = numărul de fete din clasă

$$\begin{cases} x + y = 26 \\ (y-2) = 2 \cdot (x-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 26 \quad | \cdot 2 \\ -2x + y = -4 \end{cases} \Bigg| +$$

$$(2x - 2x) + (2y + y) = 26 \cdot 2 - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y = 48 \Rightarrow y = 16$$

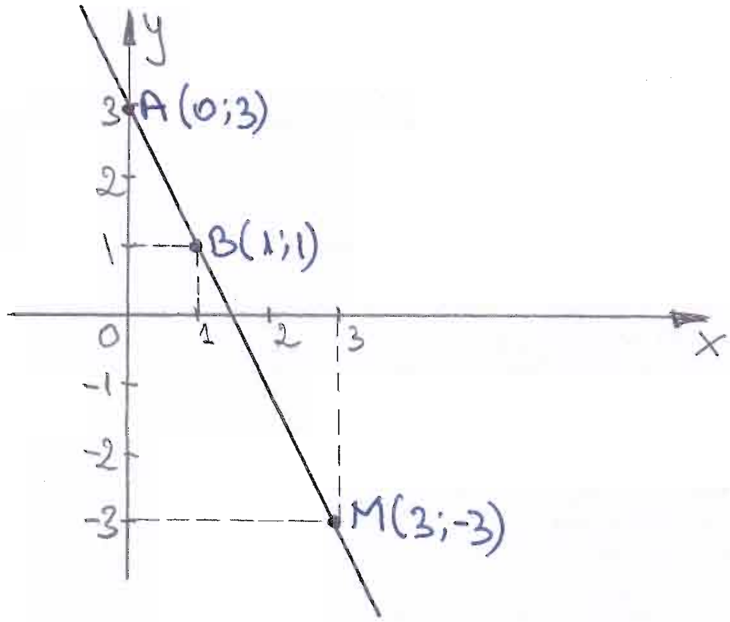
④ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2 \cdot x + 3$

ⓐ reprezentați grafic funcția f în sistemul de coordonate xOy

fie $x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = -2 \cdot 0 + 3 = 3 \Rightarrow$ graficul funcției f va trece prin punctul $A(x_0; y_0)$ unde $x_0 = 0$ și $y_0 = f(x_0) = 3 \Rightarrow A(0; 3)$

fie $x_1 = 1 \Rightarrow f(x_1) = -2 \cdot 1 + 3 = -2+3 = 1 \Rightarrow$ graficul funcției f va trece prin punctul $B(x_1; y_1)$ unde $x_1 = 1$ și $y_1 = f(x_1) = 1 \Rightarrow B(1;1)$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = -2x + 3$



b) determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care punctul $M(a; -a)$ aparține graficului funcției f.

$\Rightarrow f(a) = -a \Rightarrow -2 \cdot a + 3 = -a \Rightarrow a = 3$

⑤ Arătați că următoarea expresie $E(x) = 9$, pentru orice $x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

$$E(x) = \left(1 + \frac{2-x}{x+1}\right) : \frac{x-1}{(2x+1)^2 - (x+2)^2} \quad ; x \neq -1 \quad ; x \neq 1$$

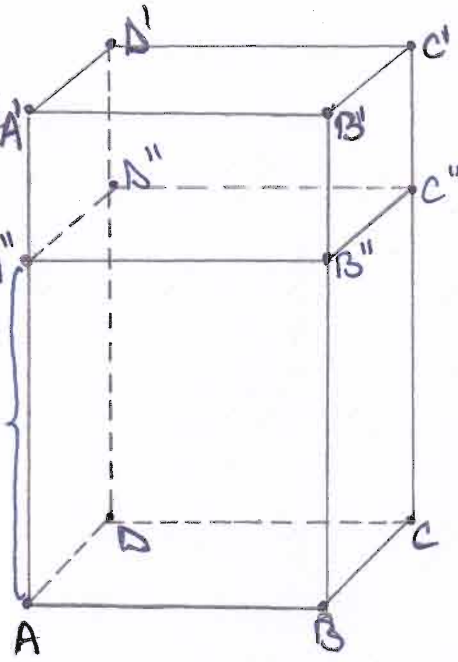
$$E(x) = \left(\frac{x+1+2-x}{x+1}\right) : \left(\frac{x-1}{((2x+1)+(x+2)) \cdot ((2x+1)-(x+2))}\right)$$

$$E(x) = \left(\frac{3}{x+1}\right) : \left(\frac{x-1}{(3x+3)\cdot(x-1)}\right) = \frac{3}{(x+1)} \cdot \frac{(3x+3)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}}$$

$$E(x) = \frac{3}{\cancel{(x+1)}} \cdot 3 \cdot \cancel{(x+1)} \Rightarrow E(x) = 9$$

Subiectul 3

① $ABCDA'B'C'D'$ = prismă dreaptă cu baza pătrat
$AA' = 40\,cm$ (înălțimea prismei)
$AB = 10\,cm$ (latura bazei)



a) calculați aria laterală a vazei.
Notăm cu „$\mathcal{A}$" = aria laterală

$$\mathcal{A} = 4\cdot(AB\cdot AA')$$

$\Rightarrow$ numeric $\mathcal{A} = 4\cdot(10\,cm)\cdot(40\,cm)$

$\Rightarrow \mathcal{A} = 1600\,cm^2$

b) Se toarnă în vază 3 l apă.
Determinați înălțimea „h" la care se ridică apa în vază.

$$\begin{cases} AB = BC = CD = DA \\ AA' = BB' = CC' = DD' \\ A'A \perp (ABCD) \\ AB \perp BC \end{cases}$$
$AA'' = h$

Notăm cu „V" = volumul de apă din vază.

$$\left.\begin{array}{l} V = h\cdot \text{Aria}_{bazei} \\ \text{Aria}_{bazei} = AB\cdot AB \end{array}\right\} \Rightarrow V = h\cdot(AB)^2$$

$$\left.\begin{array}{l} V = 3\,l \\ 1\,l = 1\,dm^3 = 1\cdot(10\,cm)^3 = 1000\,cm^3 \end{array}\right\} \Rightarrow V = 3000\,cm^3$$

$\Rightarrow h = \dfrac{V}{(AB)^2} \Rightarrow$ numeric $h = \dfrac{3000\,cm^3}{(10\,cm)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \dfrac{3000\,cm^3}{100\,cm^2} \Rightarrow h = 30\,cm$

c) În vază se introduc 4 cuburi de piatră. Fiecare cub de piatră are lungimea $X = 4$ cm. Determinați cu câți cm crește nivelul apei după introducerea celor 4 cuburi de piatră.

Notăm cu:

h_f = înălțimea finală a nivelului apei după introducerea celor 4 cuburi de piatră

$\Delta h = h_f - h$ = creșterea nivelului de apă

V_f = volumul final (apă + 4 cuburi piatră)

$$\left.\begin{array}{l} V_f = h_f \,(\text{Aria bazei}) \\ V_f = V + 4 \cdot V_{cub} \\ V_{cub} = X \cdot X \cdot X \\ \text{Aria}_{\text{bazei}} = (AB) \cdot (AB) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} h_f = \dfrac{V + 4 \cdot X^3}{(AB)^2} \\ h = \dfrac{V}{(AB)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Delta h = h_f - h = \frac{V + 4 \cdot X^3 - V}{(AB)^2} = \frac{4 \cdot X^3}{(AB)^2}$$

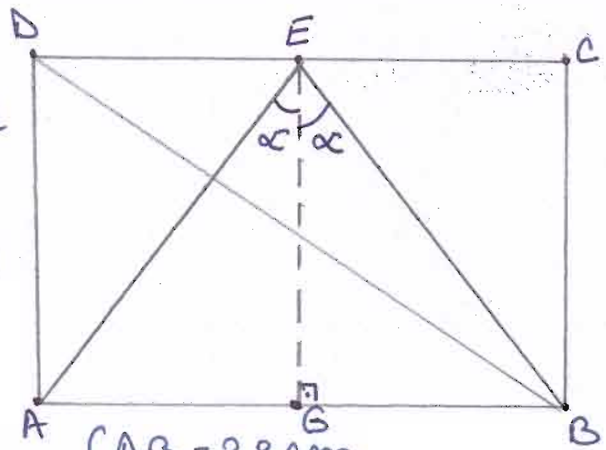
Numeric: $\Delta h = \dfrac{4 \cdot (4\,\text{cm})^3}{(10\,\text{cm})^2} = \dfrac{256\,\text{cm}^3}{100\,\text{cm}^2}$

$\Rightarrow \Delta h = 2{,}56$ cm

② În figura alăturată este reprezentată schematic o placă de gresie în formă de dreptunghi. Se știe că $AB = 28$ cm și $BC = 21$ cm. E este mijlocul lui (DC).

a) $DB = ?$

Aplicăm Teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ΔDAB (unghiul A are măsura de 90°)



$\begin{cases} AB = 28\,cm \\ BC = 21\,cm \end{cases}$

$DB^2 = AB^2 + AD^2$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow DB = \sqrt{AB^2 + AD^2} \\ AD = BC \end{array}\right\} \Rightarrow DB = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

Numeric $DB = \sqrt{(28\,cm)^2 + (21\,cm)^2} = \sqrt{1225\,cm^2}$

$DB = \sqrt{(35\,cm)^2} \Rightarrow DB = 35\,cm$

b) Determinați aria ΔEAB, pe care o notăm cu A.

$\left.\begin{array}{l} A = \dfrac{baza \cdot înălțimea}{2} \\ baza = AB \\ înălțimea = EG = CB = BC \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot (AB) \cdot (BC)$

Numeric: $A = \frac{1}{2}(28\,cm) \cdot (21\,cm) \Rightarrow A = 294\,cm^2$

c) Arătați că $\sin(\widehat{AEB}) = \frac{12}{13}$

EG = înălțime în ΔEAB isoscel $\Rightarrow$ este și bisectoare.

$\Rightarrow m(\widehat{AEB}) = m(\widehat{AEG}) + m(\widehat{BEG})$

$m(\widehat{AEG}) = m(\widehat{BEG}) = m(\widehat{\alpha})$

$$\begin{cases} \sin(\widehat{AEB}) = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cdot\cos\alpha + \sin\alpha\cdot\cos\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha \\ \text{În } \triangle AEG, \text{ dreptunghic în } G \text{ avem } \begin{cases} \sin\alpha = \sin(\widehat{AEG}) = \dfrac{AG}{AE} \\ \cos\alpha = \cos(\widehat{AEG}) = \dfrac{EG}{AE} \end{cases} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \sin(\widehat{AEB}) = 2\cdot\frac{(AG)(EG)}{(AE)^2} \\ &(AG) = \frac{(AB)}{2} \\ &(EG) = (BC) \\ &(EA)^2 = (EG)^2 + (AG)^2 = (BC)^2 + \frac{(AB)^2}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(\widehat{AEB}) = 2\cdot\frac{\left(\frac{AB}{2}\right)\cdot(BC)}{(BC)^2 + \frac{(AB)^2}{4}}$$

$$\Rightarrow \sin(\widehat{AEB}) = 4\cdot\frac{(AB)\cdot(BC)}{(AB)^2 + 4\cdot(BC)^2}$$

Calcul numeric:

$$\sin(\widehat{AEB}) = 4\cdot\frac{(28cm)\cdot(21cm)}{(28cm)^2 + 4\cdot(21cm)^2}$$

$$\sin(\widehat{AEB}) = \frac{4\cdot 28\cdot 21\cdot cm^2}{784cm^2 + 4\cdot 441cm^2}$$

$$\sin(\widehat{AEB}) = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 7\cdot 3\cdot 7\ cm^2}{2548\ cm^2}$$

$$\sin(\widehat{AEB}) = \frac{2\cdot 2\cdot 7\cdot 7\cdot 3\cdot 4\ cm^2}{2\cdot 2\cdot 7\cdot 7\cdot 13\ cm^2}$$

$$\sin(\widehat{AEB}) = \frac{12}{13}$$