Rezolvarea testului de evaluare națională ce a fost susținut de elevii claselor a VIII-a în data de 27 iunie 2013 la proba scrisă „Matematică".

Subiectul 1

① $4 \cdot 4 + 10 = 16 + 10 = 26$

② $\frac{a}{6} = \frac{5}{2} \Rightarrow a = \frac{6 \cdot 5}{2} \Rightarrow a = \frac{30}{2} \Rightarrow a = 15$

③ Cel mai mare număr natural care aparține intervalului $(3; 9]$ este numărul 9.

④ Perimetrul unui pătrat cu latura $l = 8$ cm este $p = 4 \cdot l \Rightarrow p = 4 \cdot 8$ cm $\Rightarrow p = 32$ cm

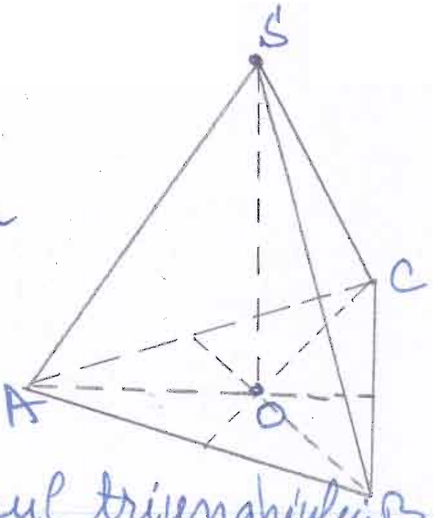
⑤ Volumul unui cub cu latura $x = 3$ cm este $V = x^3 \Rightarrow V = (3\text{ cm})^3 \Rightarrow V = 27\text{ cm}^3$

⑥ Din tabelul dat, numărul de elevi care au obținut la test nota 8 este de 5.

Subiectul 2

① Desenați o piramidă triunghiulară regulată cu

- vârful S
- baza ABC



ABC = triunghi echilateral

$SO \perp (ABC)$ unde O = centrul triunghiului

Matematica.ro

② Arătați că:

$$\sqrt{2}+\sqrt{8}-3\cdot\sqrt{2}=0 \iff$$
$$\sqrt{2}+\sqrt{4\cdot 2}-3\sqrt{2}=0 \iff$$
$$\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{2}-3\sqrt{2}=0 \iff$$
$$3\cdot\sqrt{2}-3\sqrt{2}=0 \iff$$
$$0=0$$ relație adevărată

③ Notăm cu:

a = numarul de mere a lui Ana

b = — " — " — Bogdan

c = — " — " — Călin

$$\begin{cases} a+b=7 \\ a+c=8 \\ a+b+c=12 \end{cases} \Big| + \Rightarrow \begin{cases} 2a+b+c=15 \\ a+b+c=12 \end{cases} \Big| -$$

$$a=3$$

④ Se consideră funcția

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f(x)=x+2$

a) Calculați $f(0)+f(-2)$

$$\left.\begin{aligned} f(0)&=0+2=2 \\ f(-2)&=-2+2=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(0)+f(-2)=2$$

Matematika.ro

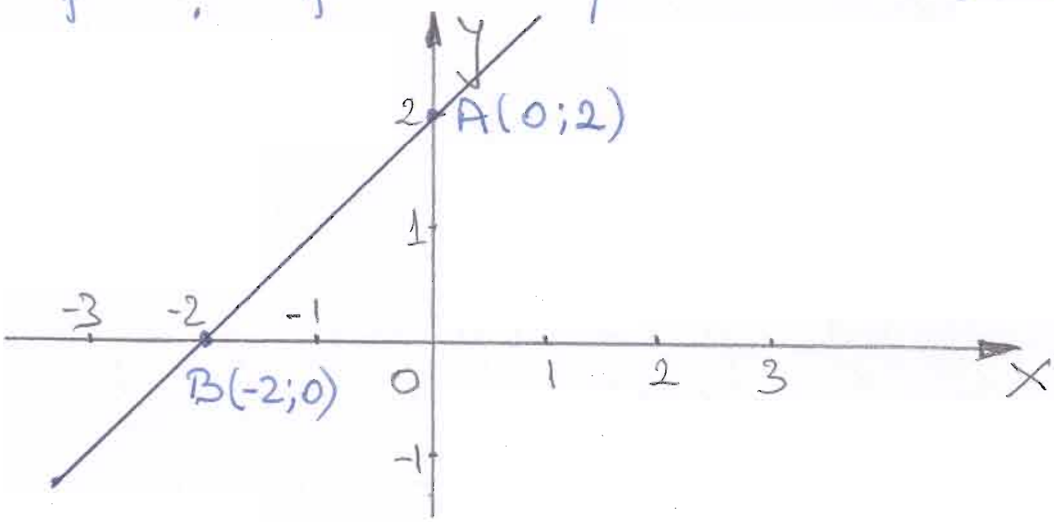
b) Reprezentați funcția f într-un sistem de coordonate xOy.

Funcția este de gradul I $\Rightarrow$ graficul ei va fi reprezentat de o dreaptă. Vom determina în mod convenabil coordonatele a două puncte diferite A și B din sistemul de coordonate xOy care aparțin graficului funcției f.

Fie punctele $\begin{cases} A \text{ de coordonate } (x_0; y_0) \\ B \text{ de coordonate } (x_1; y_1) \end{cases}$

Fie $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = f(0) = 2 \Rightarrow A(0;2)$
Fie $x_1 = -2 \Rightarrow y_1 = f(x_1) = f(-2) = 0 \Rightarrow B(-2;0)$

Graficul funcției f va trece prin A(0;2) și B(-2;0).



⑤ Arătați că următoarea expresie $E(x) = 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} - \{-2; +2\}$

$$E(x) = \left(\frac{1}{x-2} - \frac{x}{x^2-4}\right) : \frac{2}{(x-2)\cdot(x+2)}$$

Matematika.ro

$$E(x)=\left[\frac{1}{(x-2)}-\frac{x}{(x-2)(x+2)}\right]\cdot\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{2} \quad \text{cu } x\neq 2 \text{ și } x\neq -2$$

$$E(x)=\frac{(x+2)-x}{(x-2)\cdot(x+2)}\cdot\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{2} \quad \text{cu } x\neq 2 \text{ și } x\neq -2$$

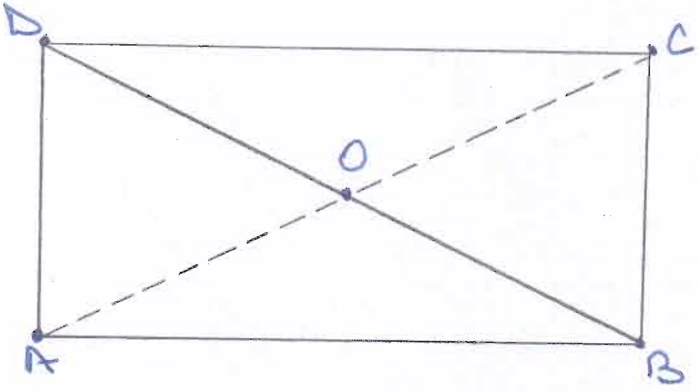
$$E(x)=\frac{2}{(x-2)\cdot(x+2)}\cdot\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{2} \quad \text{cu } x\neq 2 \text{ și } x\neq -2$$

$$E(x)=1 \quad , (\forall)\, x\in \mathbb{R}-\{-2;2\}$$

Subiectul 3

① În figura alăturată este prezentat un loc de joacă în formă de dreptunghi ABCD cu AD = 20 m și diagonala BD = 40 m.

Matematika.ro



Concluzie

a) $AB=20\cdot\sqrt{3}$ m

b) $m(\sphericalangle AOD)=60^\circ$

c) $\mathcal{A}_{ABCD}<700\ m^2$

Demonstrație

a) Triunghiul ABD este dreptunghic în unghiul A.
Aplicăm teorema lui Pitagora:

$BD^2=AB^2+AD^2$

$AB^2=BD^2-AD^2$

$AB=\sqrt{BD^2-AD^2}$

Calcul numeric:

$AB=\sqrt{(40m)^2-(20m)^2}=\sqrt{1600m^2-400m^2}$

$AB=\sqrt{1200\,m^2}=\sqrt{3\cdot4\cdot100\,m^2}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{100}$ m

$AB=20\sqrt{3}$ m

b) Se știe că diagonalele într-un dreptunghi au lungimi egale iar punctul de intersecție a diagonalelor împart diagonalele în jumătăți egale.

$$\begin{cases} (AC)\cap(BD)=\{O\} \\ BD=AC=40\ m \\ BO=DO=\dfrac{BD}{2}=20\ m \\ AO=CO=\dfrac{AC}{2}=20\ m \\ AD=20\ m \end{cases}$$

$\Rightarrow AD=AO=DO=20\ m$

$\Rightarrow$ triunghiul AOD este echilateral

$\Rightarrow m(\widehat{AOD})=60^\circ$

c) Aria dreptunghiului ABCD este

$\mathcal{A}_{ABCD}=AB\cdot AD$

Calcul numeric:

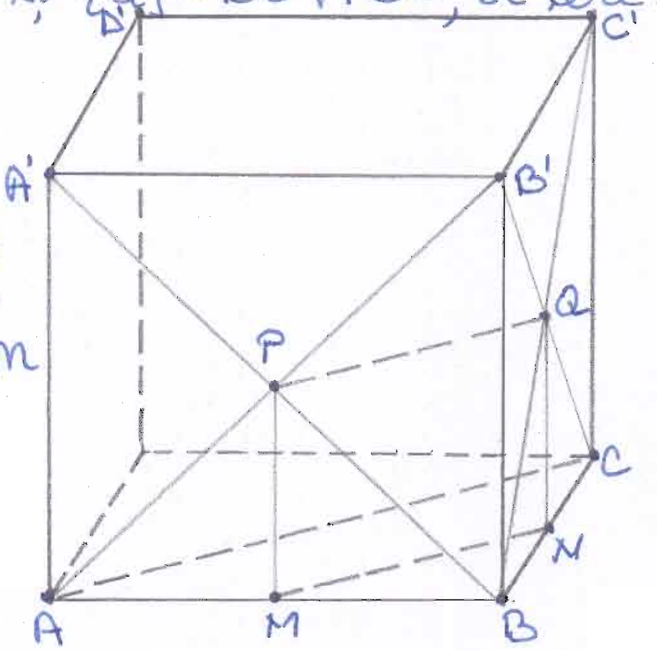
$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{A}_{ABCD}=(20\cdot\sqrt{3}\ m)\cdot(20\ m)=400\cdot\sqrt{3}\ m^2 \\ \text{Se cunoaște faptul că } \sqrt{3}<1{,}74 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\mathcal{A}_{ABCD}<400\cdot 1{,}74=696\ m^2<700\ m^2$

$\mathcal{A}_{ABCD}<700\ m^2$

Matematika.ru

② În figura alăturată este reprezentată schematic un stup de albine în formă de paralelipiped dreptunghic ABCDA'B'C'D' cu următoarele dimensiuni: $AB = 4$ dm; $BC = 6$ dm; $AA' = 8$ dm; Dacă notăm punctele $\{P\} = AB' \cap A'B$ și $\{Q\} = BC' \cap B'C$, se cere:



Concluzie

a) Perimetrul bazei ABCD

b) Aria totală ABCDA'B'C'D'

c) Arătați că $PQ = \sqrt{13}$ dm

Demonstrație

a) $P_{ABCD} = 2 \cdot (A'B + BC)$

Calcul numeric:

$P_{ABCD} = 2 \cdot (4dm + 6dm) = 20dm$

Matematika.ro

b) Notăm cu $\mathcal{A}$ = aria totală a paralelipipedului dreptunghic ABCDA'B'C'D'

$$\mathcal{A} = 2 \cdot \mathcal{A}_{ABCD} + 2 \cdot \mathcal{A}_{ABB'A'} + 2 \cdot \mathcal{A}_{BCC'B'}$$

$$\mathcal{A} = 2 \cdot (AB) \cdot (BC) + 2 \cdot (AB) \cdot (A'A) + 2 \cdot (BC) \cdot (B'B)$$

Calcul numeric:

$$\mathcal{A} = 2 \cdot (4dm) \cdot (6dm) + 2 \cdot (4dm) \cdot (8dm) + 2 \cdot (6dm) \cdot (8dm)$$

$$\mathcal{A} = 48dm^2 + 64dm^2 + 96dm^2 \Rightarrow \mathcal{A} = 208dm^2$$

c) Fie punctele M și N, proiecțiile punctelor P și Q pe muchiile AB și BC. Vom demonstra că PMNQ este un dreptunghi. Se știe că punctul de intersecție a diagonalelor într-un dreptunghi, se află la jumătatea diagonalelor $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} AP = PB' \\ PM \perp AB \\ B'B \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow PM = \text{linie mijlocie în } \triangle ABB' \Rightarrow PM = \frac{B'B}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} PM \parallel B'B \\ B'B \perp (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow PM \perp (ABC) \Rightarrow PM \perp MN$$

În mod analog se demonstrează că $QN = \frac{B'B}{2}$

$QN \perp MN$

$\Rightarrow PMNQ = \text{dreptunghi} \Rightarrow PQ = MN$

$$\left.\begin{array}{l} M = \text{mijlocul lui } AB \\ N = \text{mijlocul lui } BC \end{array}\right\} \Rightarrow MN = \text{linie mijlocie în } \triangle ABC$$

$\Rightarrow MN = \frac{AC}{2}$

Triunghiul ABC este dreptunghic în B $\Rightarrow$ în baza teoremei lui Pitagora $\Rightarrow$

$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

Numeric $\Rightarrow AC = \sqrt{(4\,dm)^2 + (6\,dm)^2} \Rightarrow AC = 2\cdot\sqrt{13}\,dm$

$MN = \sqrt{13}\,dm \Rightarrow \boxed{PQ = \sqrt{13}\,dm}$

Matematica.ro