Rezolvarea testului de evaluare națională ce a fost susținut de elevii claselor a VIII-a în data de 25.VI.2014 la proba scrisă „Matematică".

Subiectul 1

① $12 - 6 \cdot 2 = 12 - 12 = 0$

② $\left.\begin{array}{l} 10 \ldots 50\% \cdot x \\ y \ldots \quad x \end{array}\right\} \Rightarrow y = \dfrac{10 \cdot x}{50\% \cdot x} = \dfrac{10}{0{,}5} = \dfrac{10}{\frac{1}{2}} = 20$

③ Cel mai mare număr natural n, pentru care $n \leq 8$ este egal cu 8.

④ Un romb ABCD, are diagonalele $d_1 = AC = 6\,cm$ și $d_2 = BD = 8\,cm$. Aria rombului este:

$\mathcal{A}_{ABCD} = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2} \Rightarrow \mathcal{A}_{ABCD} = \dfrac{6\,cm \cdot 8\,cm}{2} = 24\,cm^2$

⑤ Un tetraedru regulat ABCD are lungimea unei muchii de $l = 8\,cm$. $(AB = 8\,cm)$.
Suma Σ a tuturor muchiilor tetraedrului regulat este: $\Sigma = 6 \cdot l = 6 \cdot AB \Rightarrow \Sigma = 6 \cdot 8\,cm$
$\Rightarrow \Sigma = 48\,cm$

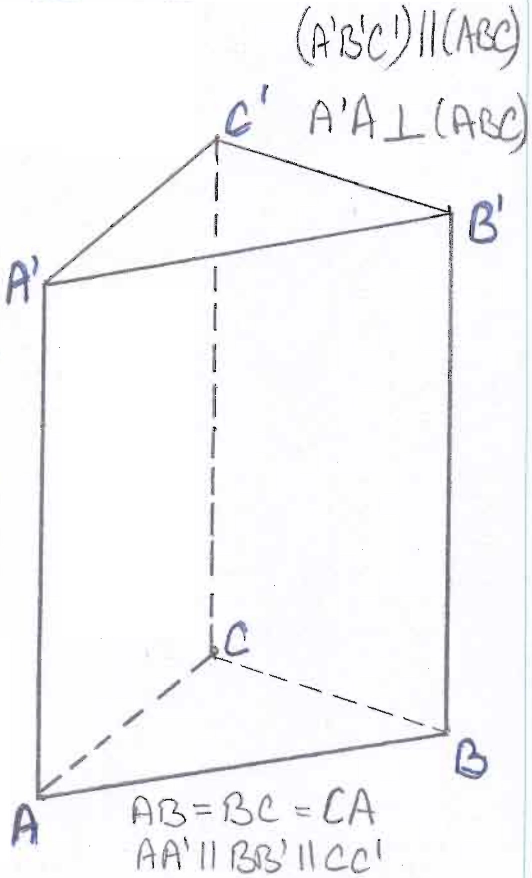
⑥ Notăm cu:
i = numărul de copii care optează „limba italiană"
f = — „ — „ — „ — „limba franceză"
e = — „ — „ — „ — „limba engleză"
s = — „ — „ — „ — „limba spaniolă"
$i + f + e + s = 100 \Rightarrow s = 100 - (i + f + e)$

Din diagrama dată, se observă că

$$\left.\begin{array}{l} i = 15 \\ f = 27 \\ e = 45 \end{array}\right\} \Rightarrow i + f + e = 87 \Rightarrow s = 100 - 87$$

$$\Rightarrow s = 13$$

<u>Subiectul 2</u>



① Desenați o prismă dreaptă ABCA'B'C', la care baza ABC să fie un triunghi echilateral.

② Calculați media geometrică a numerelor a și b, unde

$a = 2^3 + 1 = 8 + 1 = 9$

$b = 3 + 3 : 3 = 3 + 1 = 4$

$m_g = \sqrt{a \cdot b}$

$m_g = \sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 2 \Rightarrow m_g = 6$

③ Ion parcurge un drum în trei zile.
În prima zi parcurge 20% din drum.
În a doua zi parcurge 30% din rest.
În a treia zi parcurge ultimii 560 km.
Determinați lungimea drumului parcurs de Ion în cele trei zile de mers cu autocarul.

Notăm cu x = lungimea drumului căutată.
Vom scrie matematic enunțul problemei.

Mai notăm cu:

d_1 = distanța parcursă în ziua 1

d_2 = — " — " — ziua 2

d_3 = — " — " — ziua 3

$$d_1 + d_2 + d_3 = x$$

Ziua 1:

se parcurge: $d_1 = 20\% \cdot x$

rămâne de parcurs: $d_2 + d_3 = x - d_1 = 80\% \cdot x$

Ziua 2:

se parcurge: $d_2 = 30\% \cdot (80\% \cdot x) = \frac{30}{100} \cdot \frac{80}{100} \cdot x$

$$d_2 = \frac{24}{100} \cdot x \Rightarrow d_2 = 24\% \cdot x$$

rămâne de parcurs: d_3

Ziua 3:

se parcurge: $d_3 = 560$ km

nu mai rămâne nimic de parcurs.

Putem scrie:

$$20\% \cdot x + 24\% \cdot x + 560 \text{ km} = x$$

$$x = \frac{560 \text{ km}}{1 - (20\% + 24\%)} = \frac{560 \text{ km}}{1 - 44\%} = \frac{560 \text{ km}}{100\% - 44\%}$$

$$\Rightarrow x = \frac{560 \text{ km}}{56\%} = \frac{560 \text{ km}}{\frac{56}{100}} = (10 \text{ km}) \cdot 100 \Rightarrow x = 1000 \text{ km}$$

4) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$

a) Calculați $f(2)$

$f(2) = 2 - 2 = 0$

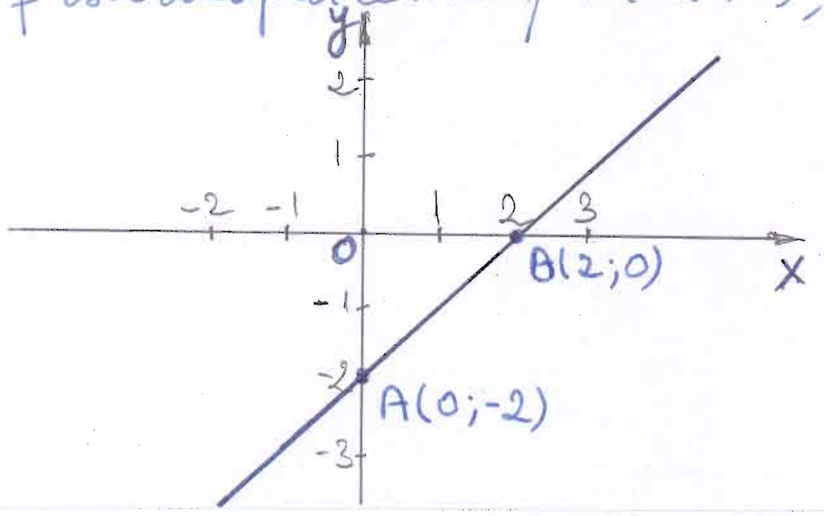
b) Reprezentați grafic funcția f într-un sistem de coordonate xOy.

Funcția dată este de gradul I $\Rightarrow$ graficul ei va fi reprezentat de o dreaptă. Vom determina convenabil coordonatele a două puncte diferite A și B din sistemul de coordonate xOy care aparțin graficul funcției f

Fie punctul $A(x_0, y_0) \in$ graficul funcției f.
$B(x_1; y_1) \in$ graficul funcției f

Fie $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = 0 - 2 = -2 \Rightarrow A(0; -2)$
$x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = f(x_1) = 2 - 2 = 0 \Rightarrow B(2; 0)$

Graficul funcției f este dreapta ce trece prin $A(0;-2)$ și $B(2;0)$



⑤ Arătați că următoarea expresie $E(x)=1$, oricare ar fi numărul $x \in \mathbb{R}$, cu $x \neq -2$ și $x \neq 0$.

$$E(x) = \frac{x^2+4x+4}{x\cdot(x+2)} : \left(1+\frac{2}{x}\right) \quad ; \; x \neq -2 \; ; \; x \neq 0$$

$$E(x) = \frac{x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2}{x\cdot(x+2)} : \left(\frac{x}{x}+\frac{2}{x}\right) \Longleftrightarrow$$

$$E(x) = \frac{(x+2)^2}{x\cdot(x+2)} : \left(\frac{x+2}{x}\right) \Longleftrightarrow$$

$$E(x) = \frac{(x+2)}{x} \cdot \frac{x}{(x+2)} \Longleftrightarrow$$

$$E(x) = 1 \; , \; (\forall)\, x \in \mathbb{R} - \{-2;0\}$$

Subiectul 3

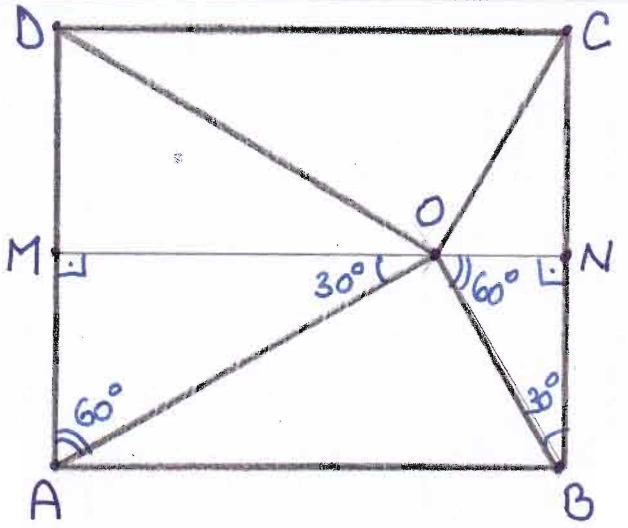
① În desenul alăturat se prezintă schița unui covor în formă de dreptunghi ABCD. Punctul {O} este în interiorul covorului (dreptunghiului ABCD) astfel încât
- triunghiul AOD este echilateral
- $AD = 2$ m
- $m(\sphericalangle BOC) = 2\cdot m(\sphericalangle AOD)$

Concluzie:

a) Perimetrul triunghiului AOD

b) Distanța de la O la BC este $\frac{\sqrt{3}}{3}$ m.

c) Lungimea conturului covorului este < 9 m



$l = AO = OD = DA$
$h = ON$

$60^\circ = m(\widehat{DAO}) = m(\widehat{AOD})$
$120^\circ = m(\widehat{BOC})$

Demonstratie:

a) $P_{\triangle AOD} = 3 \cdot l \Rightarrow P_{\triangle AOD} = 6m$

b) Fie dreapta $d \parallel AB$, unde $\{O\} \in d$
Notăm cu $\{M\} = d \cap (AD)$
$\{N\} = d \cap (BC)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ABNM este dreptunghi
$\Rightarrow$ DCNM este dreptunghi

$OM \perp AD$
$\triangle OAD$ = echilateral $\Rightarrow$ OM este mediană și bisectoare $\Rightarrow$

$\Rightarrow AM = DM = \frac{l}{2} \Rightarrow BN = CN = \frac{l}{2}$

$\Rightarrow m(\sphericalangle MOA) = 30^\circ$

În $\triangle OBC$, ON este înălțime și mediană $\Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle OBC$ este isoscel $(OB = OC) \Rightarrow ON$ = bisectoarea unghiului $BOC \Rightarrow m(\sphericalangle BON) = 60^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle OBN) = 30^\circ$

$$\left.\begin{array}{l} m(\widehat{OMA}) = m(\widehat{BNO}) = 90^\circ \\ m(\widehat{MAO}) = m(\widehat{NOB}) = 60^\circ \\ m(\widehat{AOM}) = m(\widehat{OBN}) = 30^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ triunghiurile MAO și NOB sunt asemenea

$$\Rightarrow \Delta MAO \sim \Delta NOB \Rightarrow \frac{NO}{MA} = \frac{NB}{MO}$$

$$\left.\begin{array}{l} NO = h \\ MA = \frac{\ell}{2} \\ NB = \frac{\ell}{2} \\ MO = \sin 60^\circ \cdot OA = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \ell \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{h}{\frac{\ell}{2}} = \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\ell} \Rightarrow \frac{2h}{\ell} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow h = \frac{1}{2\cdot\sqrt{3}} \cdot \ell \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \ell \\ \ell = AD = 2m \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 2m \Rightarrow \boxed{h = \frac{\sqrt{3}}{3} m}$$

c) conturul este dat de laturile AB, BC, CD și DA $\Rightarrow$ Lungimea conturului = Perimetrul dreptunghiului ABCD

$$\left.\begin{array}{l} P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 2\cdot(AB) + 2\cdot(AD) \\ AD = \ell = 2m \\ AB = MN = MO + ON = \ell \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \ell \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$P_{ABCD} = 2\cdot \ell + 2\cdot\left(\ell\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \ell\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$P_{ABCD} = \ell\cdot\left(2+\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

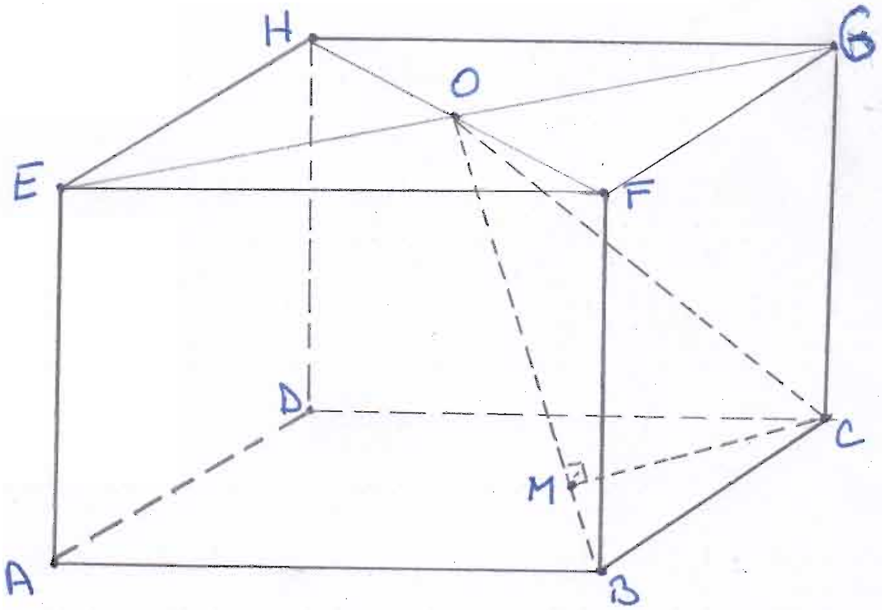
$$P_{ABCD} = \frac{6+4\cdot\sqrt{3}}{3}\cdot \ell \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} P_{ABCD} = \frac{6+4\cdot\sqrt{3}}{3}\cdot 2\,m \Rightarrow P_{ABCD} = \frac{12+8\cdot\sqrt{3}}{3}\,m \\ \text{Se cunoaște faptul că } \sqrt{3} < 1,74 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$P_{ABCD} < \frac{12+8\cdot 1,74}{3}\,m = \frac{12+13,92}{3}\,m = \frac{25,92}{3}\,m < \frac{27}{3}\,m = 9\,m$$

$$\Leftrightarrow P_{ABCD} < 9\,m$$

② O cutie de carton cu copac are forma unei prisme drepte ABCDEFGH, cu baza ABCD = pătrat. Se consideră O = mijlocul lui EG și $M \in (OB)$, astfel încât CM = valoare minimă.



AB = 20 cm
AE = 10 cm

Fie ℓ = AB = BC = CD = AD = EF = FG = GH = HE = 20 cm
h = AE = BF = CG = DH = 10 cm

Concluzie

a) $V_{ABCDEFGH} = ?$

b) $A_{carton} = ?$, dacă se știe că $A_{carton} = 110\% \cdot A_{ABCDEFGH}$

c) Arătați că $CM = \frac{20\sqrt{6}}{3}$ cm

Demonstrație

a) $V_{ABCDEFGH} = (AB)\cdot(BC)\cdot(AE) = \ell^2 \cdot h$

$V_{ABCDEFGH} = (20\,cm)\cdot(20\,cm)\cdot(10\,cm) \Rightarrow V_{ABCDEFGH} = 4000\,cm^3$

b) $A_{ABCDEFGH} = 2\cdot A_{ABCD} + 2\cdot A_{ABFE} + 2\cdot A_{BCGF}$

$A_{ABCDEFGH} = 2\cdot(\ell\cdot\ell + \ell\cdot h + \ell\cdot h)$
$A_{ABCDEFGH} = 2\cdot\ell\cdot(\ell + 2h) \Rightarrow$

$A_{ABCDEFGH} = 2\cdot(20\,cm)\cdot(20\,cm + 2\cdot 10\,cm) = (40\,cm)\cdot(40\,cm)$

$A_{ABCDEFGH} = 1600\,cm^2 \Rightarrow A_{carton} = 110\% \cdot 1600\,cm^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{carton} = 1760\,cm^2$

c) CM = distanța minimă dintre C și (OB) $\Rightarrow$
$CM \perp OB$
O = mijlocul lui EG $\Rightarrow \{O\} = EG \cap HF$

$\triangle HGF$ dreptunghic în G $\Rightarrow$ Teorema lui Pitagora
$HF^2 = HG^2 + FG^2 \Rightarrow HF^2 = \ell^2 + \ell^2 \Rightarrow HF = \ell\cdot\sqrt{2}$
$\Rightarrow OF = \frac{HF}{2} \Rightarrow OF = \ell\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

Triunghiul OFB este dreptunghic în F $\Rightarrow$ T. Pitagora

$OB^2 = OF^2 + FB^2 \Rightarrow OB^2 = \frac{1}{2} \cdot l^2 + h^2$

$\Rightarrow OB = \sqrt{\frac{1}{2} l^2 + h^2} \Rightarrow OB = \sqrt{\frac{1}{2}(20cm)^2 + (10cm)^2}$

$\Rightarrow OB = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 400cm^2 + 100cm^2} \Rightarrow \boxed{OB = 10 \cdot \sqrt{3}\ cm}$

În mod analog se poate arata $\boxed{OC = 10 \cdot \sqrt{3}\ cm}$

Vom scrie formula ariei suprafeței triunghiului OBC în două moduri diferite și vom calcula lungimea segmentului CM.

Formula lui Heron

$$\begin{cases} A = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} \\ A = \frac{1}{2} \cdot (OB) \cdot (CM) \end{cases}, \text{ unde } \begin{cases} a = OB = 10\sqrt{3}\ cm \\ b = OC = 10\sqrt{3}\ cm \\ c = BC = 20\ cm \\ p = \frac{1}{2}(a+b+c) \end{cases}$$

$$\Rightarrow CM = \frac{2 \cdot \sqrt{p(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}}{OB}$$

Calcule numerice $\Rightarrow p = 10 \cdot (1+\sqrt{3})\ cm \Rightarrow \begin{cases} (p-a) = 10\ cm \\ (p-b) = 10\ cm \\ (p-c) = 10 \cdot (\sqrt{3}-1)\ cm \end{cases}$

$$\Rightarrow CM = \frac{2 \cdot \sqrt{10 \cdot (1+\sqrt{3}) \cdot 10^2 \cdot 10 \cdot (\sqrt{3}-1) \cdot cm^4}}{10 \cdot \sqrt{3} \cdot cm}$$

$$\Rightarrow CM = \frac{2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1}}{10 \cdot \sqrt{3}} \cdot \frac{cm^2}{cm} = 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ cm \Rightarrow$$

$\Rightarrow CM = \dfrac{20 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ cm (amplificăm cu $\sqrt{3}$)

$\Rightarrow CM = \dfrac{20 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}$ cm

$\Rightarrow \boxed{CM = \dfrac{20 \cdot \sqrt{6}}{3} \text{ cm}}$