Rezolvarea testului de evaluare națională ce a fost susținut de elevii claselor a VIII-a în data 29.VI.2016 la proba scrisă „Matematică”.

Subiectul I

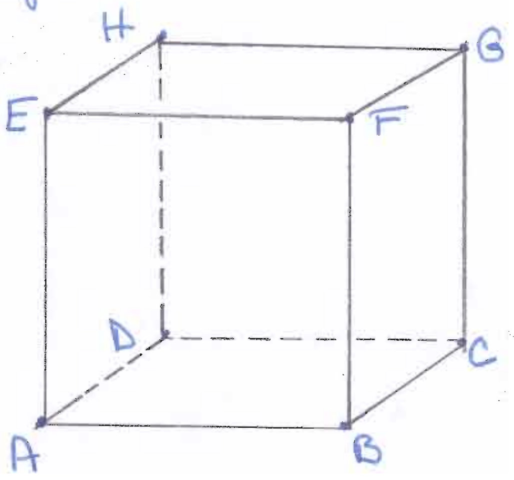
① $10 \cdot 5 - 50 = 50 - 50 = 0$

② $\frac{a}{16} = \frac{7}{8} \Rightarrow a = \frac{16 \cdot 7}{8} \Rightarrow a = 14$

③ Cel mai mare număr natural care aparține intervalului $(2;6]$ este egal cu 6.

④ Un pătrat are lungimea unei laturi $l = 3\,cm$.
Perimetrul pătratului este $p = 4 \cdot l \Rightarrow$
$p = 4 \cdot 3\,cm \Rightarrow p = 12\,cm$

⑤ Se consideră cubul ABCDEFGH ca în figura de mai jos. Măsura unghiului format de dreptele AB și AD este egală cu 90°.



ABCD = pătrat

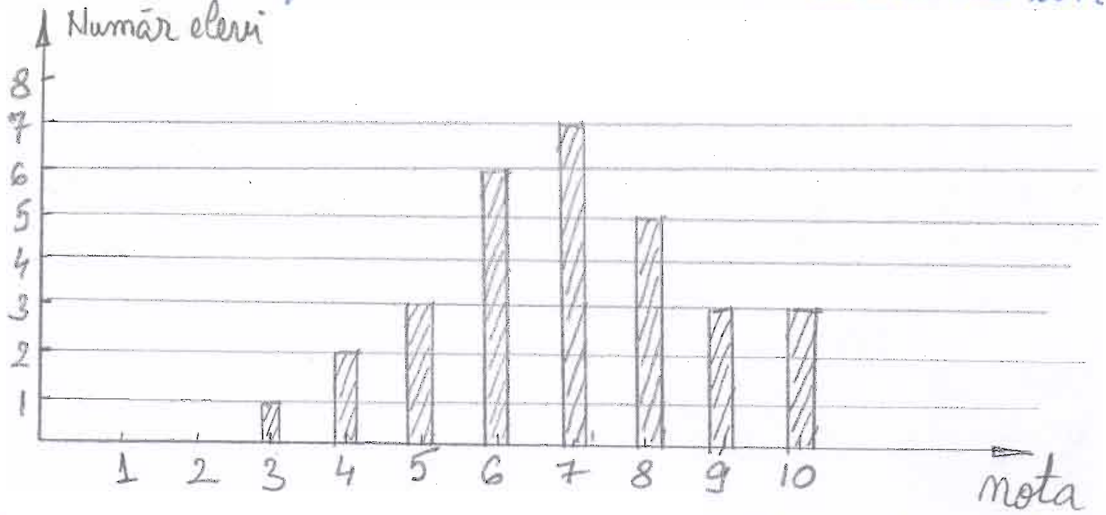
$\Downarrow$

$AB \perp AD$ (în A)

$\Downarrow$

$m(\sphericalangle BAD) = 90^\circ$

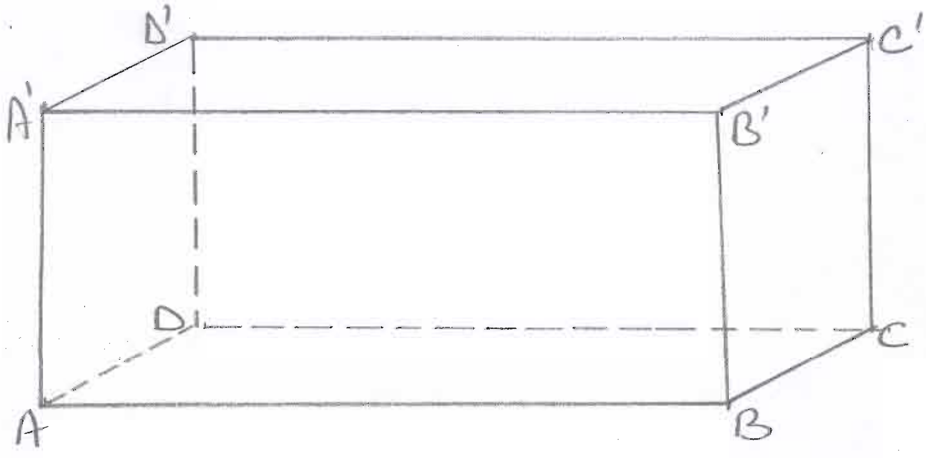
⑥ În diagrama de mai jos este prezentată diagrama cu notele obținute de elevii unei clase la un test.



Numărul elevilor care au obținut nota 5 este egal cu 3 (trei).

Subiectul 2

① Desenați un paralelipiped dreptunghic ABCDA'B'C'D'



② Se știe că: $x = \sqrt{3}$ și $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Arătați că: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{3}$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x\cdot x}{x\cdot y}+\frac{y\cdot y}{x\cdot y}=\frac{x^2+y^2}{x\cdot y}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\sqrt{3} \\ y=\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2=(\sqrt{3})^2=3 \\ y^2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{3} \\ x\cdot y=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{3+\frac{1}{3}}{1}=3+\frac{1}{3}=\frac{9+1}{3}=\frac{10}{3}$$

(3) Mihai a economisit o sumă de bani. După ce a cheltuit două cincimi din această sumă, i-au mai rămas 72 lei. Calculați suma de bani economisită de Mihai.

Notăm cu x = suma de bani economisită
Putem scrie că:

$$\frac{2}{5}\cdot x+72 \text{ lei}=x \Rightarrow x=\frac{72 \text{ lei}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{72 \text{ lei}}{\frac{5-2}{5}}$$

$$\Rightarrow x=\frac{5\cdot 72 \text{ lei}}{3}=5\cdot 24 \text{ lei} \Rightarrow \boxed{x=120 \text{ lei}}$$

(4) Se consideră funcția
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$

a) Reprezentați grafic funcția f într-un sistem de coordonate cartezian xOy.

b) Calculați aria suprafeței triunghiului determinat de graficul funcției f, și axele sistemului de coordonate xOy.

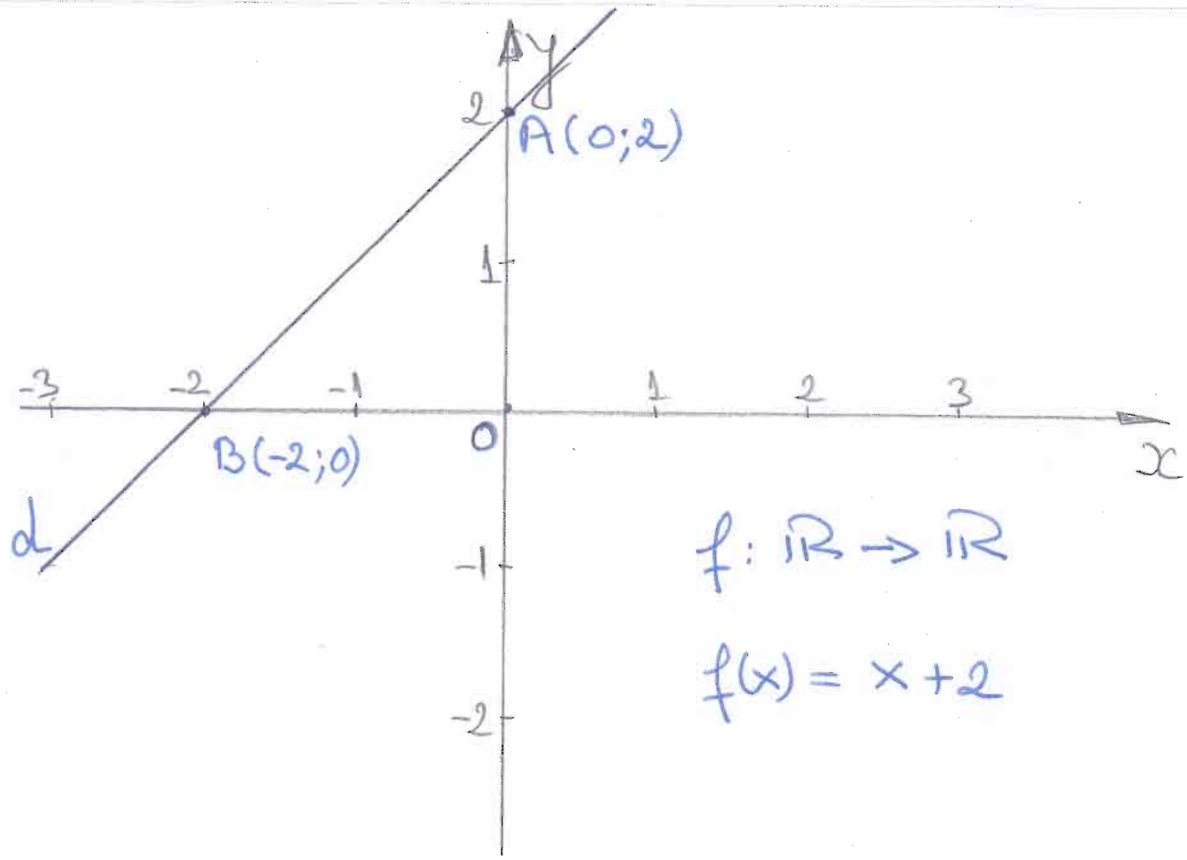
a) Exponentul lui x este 1, deci funcția este de gradul I. Se cunoaște faptul că graficul unei funcții de gradul I este reprezentat de o dreaptă. Se mai cunoaște faptul că prin două puncte diferite va trece o dreaptă și numai una. Vom găsi convenabil două puncte diferite din sistemul de coordonate xOy care să aparțină graficul funcției. Unind cele două puncte printr-o dreaptă vom obține graficul funcției f de mai sus.

Fie A de coordonate $(x_0; y_0)$
Fie B de coordonate $(x_1; y_1)$

$A \in$ graficul funcției $\Rightarrow y_0 = f(x_0) = x_0 + 2$
Fie $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow A(0; 2)$

$B \in$ graficul funcției $\Rightarrow y_1 = f(x_1) = x_1 + 2$
Fie $x_1 = -2 \Rightarrow y_1 = 0 \Rightarrow B(-2; 0)$

$d = AB$ reprezintă graficul funcției f de mai sus în sistemul de coordonate xOy.



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x + 2$

b) Triunghiul pentru care se va calcula aria suprafeței este dat de punctele OAB. Deoarece axele în sistemul cartezian XOY sunt perpendiculare între ele, triunghiul AOB este dreptunghic în O cu $m(\widehat{AOB}) = 90^\circ$.

Deoarece nu se specifică în problemă unitatea de măsură pe abscisă și pe ordonată față de reperul O, putem considera orice unitate dorim noi. Putem alege „metrul" ca fiind distanța de la O la 1 pe axa absciselor, respectiv pe axa ordonatelor.

Distanța de la B la O este de 2 m

Distanța de la A la O este de 2 m

Aria triunghiului AOB este:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{A}_{\Delta AOB} = \dfrac{AO \cdot BO}{2} \\ AO = 2\,m \\ BO = 2\,m \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta AOB} = 2\,m^2$$

⑤ Arătați că $(\forall)\, x \in \mathbb{R} - \{-2; 2\}$, următoarea expresie $E(x) = 2$, unde:

$$E(x) = \left(1 + \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+2}\right) : \frac{1}{x^2-4} - x\cdot(x-1)$$

În prima paranteză a expresiei $E(x)$, vom aduce cei trei termeni la același numitor comun $(x-2)\cdot(x+2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$, și vom avea:

$$E(x) = \frac{(x^2-4) + (x+2) - 2\cdot(x-2)}{\cancel{x^2-4}} \cdot \frac{\cancel{x^2-4}}{1} - x\cdot(x-1)$$

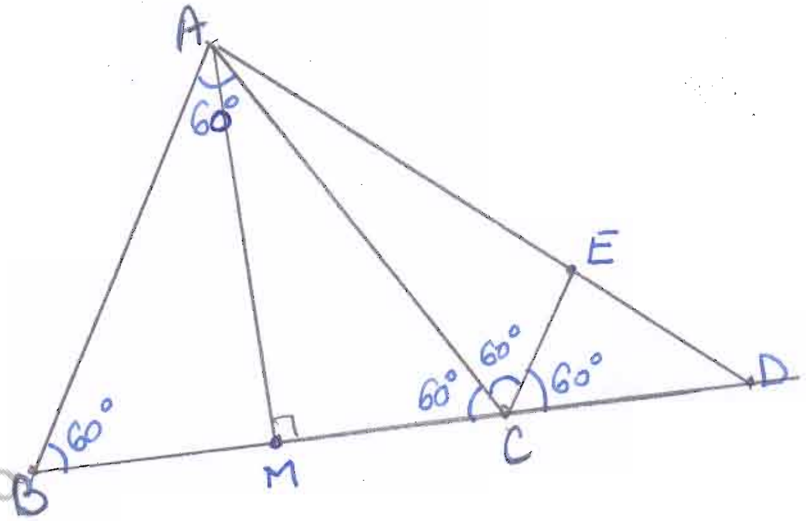
$$E(x) = \cancel{x^2} - 4 + x + 2 - 2x + 4 - \cancel{x^2} + x$$

$$E(x) = 2\ ,\quad (\forall)\, x \in \mathbb{R} - \{-2; 2\}$$

Subiectul 3

① În figura următoare este prezentată schița unui teren. Se știe că triunghiul ABC este echilateral cu AB = 18 m. Punctul $D \in BC$, astfel încât triunghiul ACD este obtuzunghic cu CD = 9 m. $E \in (AD)$ astfel încât $\widehat{ACE} \equiv \widehat{DCE}$

Concluzie:
a) Arătați că aria triunghiului ABC este $81\cdot\sqrt{3}\ m^2$
b) Demonstrați că dreptele EC și AB sunt paralele.
c) Arătați că perimetrul triunghiului EAC este egal cu $6\cdot(4+\sqrt{7})\ m$



Demonstrație
a) Se cunoaște faptul că aria suprafeței unui triunghi echilateral este

$$\mathcal{A} = \ell^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$, unde ℓ = lungimea laturii triunghiului echilateral

Numeric:

$$\mathcal{A} = (18\ m)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{18\cdot 18}{4}\cdot\sqrt{3}\ m^2 = 9\cdot 9\cdot\sqrt{3}\ m^2$$

$$\mathcal{A} = 81\cdot\sqrt{3}\ m^2$$

b) $m(\sphericalangle BAC) = 60^\circ$, deoarece triunghiul ABC este echilateral

$$m(\sphericalangle ACD) = 180^\circ - m(\sphericalangle ACB) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Notăm cu $\alpha = m(\sphericalangle ACE) = m(\sphericalangle ECD) \Rightarrow 2\cdot\alpha = 120^\circ$

$\Rightarrow \alpha = 60^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle ACE) = 60^\circ$

$\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ECA$, deoarece au aceeași măsură de 60°.

Considerăm dreapta $d_1 = AB$

— " — dreapta $d_2 = CE$

— " — secanta $d_3 = AC$

$\Rightarrow d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow AB \parallel CE$

c) $EC \parallel AB \Rightarrow$ triunghiurile DEC și DAB sunt asemenea $\Rightarrow$ scriem $\triangle DEC \sim \triangle DAB$

$$\Rightarrow \frac{EC}{AB} = \frac{DC}{DB} \Leftrightarrow \frac{EC}{AB} = \frac{DC}{(BC+DC)}$$

$$\Rightarrow EC = AB \cdot \frac{DC}{(BC+DC)}$$

Numeric:

$$EC = 18\,m \cdot \frac{9\,m}{(18\,m + 9\,m)} = \frac{2\cdot 9\cdot 9}{3\cdot 9}\,m$$

$$\Rightarrow \boxed{EC = 6\,m}$$

$$\triangle DEC \sim \triangle DAB \Rightarrow \frac{DE}{DA} = \frac{EC}{AB}$$

$$\Rightarrow DE = DA \cdot \frac{EC}{AB}$$

Fie punctul M proiecția punctului A pe latura BC. Triunghiul AMD este dreptunghic în M. Vom aplica Teorema lui Pitagora $\Rightarrow AD^2 = AM^2 + MD^2$

$$AD = \sqrt{AM^2 + MD^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{În } \triangle AMC \text{ dreptunghic} \Rightarrow \sin \widehat{ACM} = \dfrac{AM}{AC} \\ m(\sphericalangle ACM) = 60^\circ \\ \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$AM = AC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{Numeric } AM = 18\,m \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow AM = 9 \cdot \sqrt{3}\,m$$

$$\Rightarrow AD = \sqrt{(9 \cdot \sqrt{3}\,m)^2 + (18\,m)^2} = \sqrt{3 \cdot 9^2 + 2^2 \cdot 9^2}\,m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD = 9 \cdot \sqrt{7}\,m$$

$$\Rightarrow DE = 9 \cdot \sqrt{7}\,m \cdot \frac{6\,m}{18\,m} \Rightarrow DE = 3 \cdot \sqrt{7}\,m$$

$$AE = AD - DE \Rightarrow \text{Numeric } AE = 9 \cdot \sqrt{7}\,m - 3 \cdot \sqrt{7}\,m$$

$$\Rightarrow \boxed{AE = 6 \cdot \sqrt{7}\,m}$$

Perimetrul triunghiului EAC este

$$P_{\triangle EAC} = EA + AC + CE$$

$$P_{\triangle EAC} = 6 \cdot \sqrt{7}\,m + 18\,m + 6\,m \Rightarrow P_{\triangle EAC} = 6 \cdot (4 + \sqrt{7})\,m$$

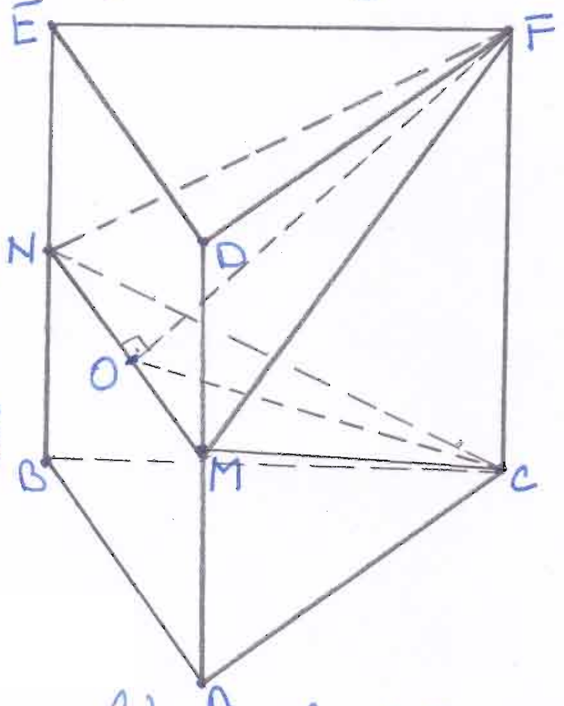
② În figura următoare este reprezentată o prismă dreaptă ABCDEF, cu baza triunghi echilateral. Se cunosc lungimile $AB = 10$ cm și $AD = 10\cdot\sqrt{3}$ cm. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor AD, respectiv BE.

Concluzie:

a) Arătați că perimetrul $\triangle ABC$ este $= 30$ cm.

b) Arătați că aria laterală a prismei este $< 525\ cm^2$

c) Demonstrați că planele $(CMN) \perp (FMN)$



Demonstrație

a) $\triangle ABC$ este echilateral cu latura $l = AB = 10$ cm.

Perimetrul $\triangle ABC$ este:

$P_{\triangle ABC} = 3\cdot l \Rightarrow P_{\triangle ABC} = 3\cdot 10\ cm \Rightarrow P_{\triangle ABC} = 30\ cm.$

b) Aria laterală a prismei ABCDEF este:

$\left.\begin{array}{l} A_{laterală} = 3\cdot A_{ADEB} \\ \text{figura ADEB este un dreptunghi} \Rightarrow A_{ADEB} = AB\cdot AD \end{array}\right\} \Rightarrow$

$A_{laterală} = 3\cdot AB\cdot AD \Rightarrow A_{laterală} = 3(10\ cm)\cdot(10\cdot\sqrt{3}\ cm)$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow A_{laterală} = 300\cdot\sqrt{3}\ cm^2 \\ \sqrt{3} < 1{,}74 \end{array}\right\} \Rightarrow A_{laterală} < 300\cdot 1{,}74\ cm^2$

$\Rightarrow \mathcal{A}_{laterală} < 522\ cm^2 < 525\ cm^2 \Rightarrow \mathcal{A}_{laterală} < 525\ cm^2$

e) ABCDEF este prisma dreaptă cu baza Δ echilateral $\Rightarrow$

$AB = BC = CA = DE = EF = FD = 10\ cm$

$AD = BE = CF = 10 \cdot \sqrt{3}\ cm$

$AD \perp (ABC)$; $AD \perp (DEF)$

$BE \perp (ABC)$; $BE \perp (DEF)$

$M =$ mijlocul lui $AD \Rightarrow MD = MA = \dfrac{AD}{2} = 5 \cdot \sqrt{3}\ cm$

$N =$ mijlocul lui $BE \Rightarrow NE = NB = \dfrac{BE}{2} = 5\sqrt{3}\ cm$

În triunghiul dreptunghic DMF aplicăm teorema lui Pitagora $\Rightarrow MF^2 = MD^2 + DF^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow MF = \sqrt{MD^2 + DF^2} \Rightarrow MF = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 + 10^2}\ cm$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow MF = \sqrt{175}\ cm \\ \text{Analog se arată că } MC = \sqrt{175}\ cm \\ \qquad\qquad\qquad\qquad NF = \sqrt{175}\ cm \\ \qquad\qquad\qquad\qquad NC = \sqrt{175}\ cm \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ triunghiul NFM isoscel, cu $NF = MF$

triunghiul NCM isoscel, cu $NC = MC$

Fie punctul $O =$ mijlocul segmentului MN

$\Rightarrow FO$ este mediană în triunghiul isoscel FMN

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow FO \text{ este și înălțime în } \Delta FMN \Rightarrow FO \perp MN \\ \text{În mod analogic în } \Delta CMN \Rightarrow CO \perp MN \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\widehat{(MFN),(MCN)} = \widehat{FOC}$

Vom demonstra că $m(\sphericalangle FOC) = 90^\circ$

$ABNM$ = dreptunghi $\Rightarrow NM = AB \Rightarrow NM = 10\text{ cm}$
$\Rightarrow ON = OM = 5\text{ cm}.$

În triunghiul dreptunghic NOF, aplicăm teorema lui Pitagora $\Rightarrow NF^2 = NO^2 + OF^2 \Rightarrow OF^2 = NF^2 - NO^2$
$\Rightarrow OF^2 = 175\text{ cm}^2 - 25\text{ cm}^2 \Rightarrow \boxed{OF^2 = 150\text{ cm}^2}$

În mod anologic se demonstrează că $\boxed{OC^2 = 150\text{ cm}^2}$

$FC = 10\cdot\sqrt{3}\text{ cm} \Rightarrow \boxed{FC^2 = 300\text{ cm}^2}$

Se observă că $FC^2 = OF^2 + OC^2 = 300\text{ cm}^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ în baza reciprocii Teoremei lui Pitagora $\Rightarrow$
triunghiul FOC este un triunghi dreptunghic în $O \Rightarrow m(\sphericalangle FOC) = 90^\circ \Rightarrow$

$(FMN) \perp (CMN)$