Rezolvarea testului de evaluare națională ce a fost susținut de elevii claselor a VIII-a în data 21.VI.2017 la proba scrisă „Matematică".

Subiectul 1

① $20 - 20:2 = 20 - 10 = 10$

② Șase caiete de același fel costă 30 lei. Trei dintre acestea costă $\frac{30 \text{ lei}}{2} = 15$ lei.

③ Fie mulțimile $A = \{1,2,3,4\}$ și $B = \{4,6,8\}$. Mulțimea $A \cap B = \{4\}$

④ Aria unui pătrat cu latura de $\ell = 6$ cm este $A = \ell^2 = (6\text{ cm})^2 = 36\text{ cm}^2$

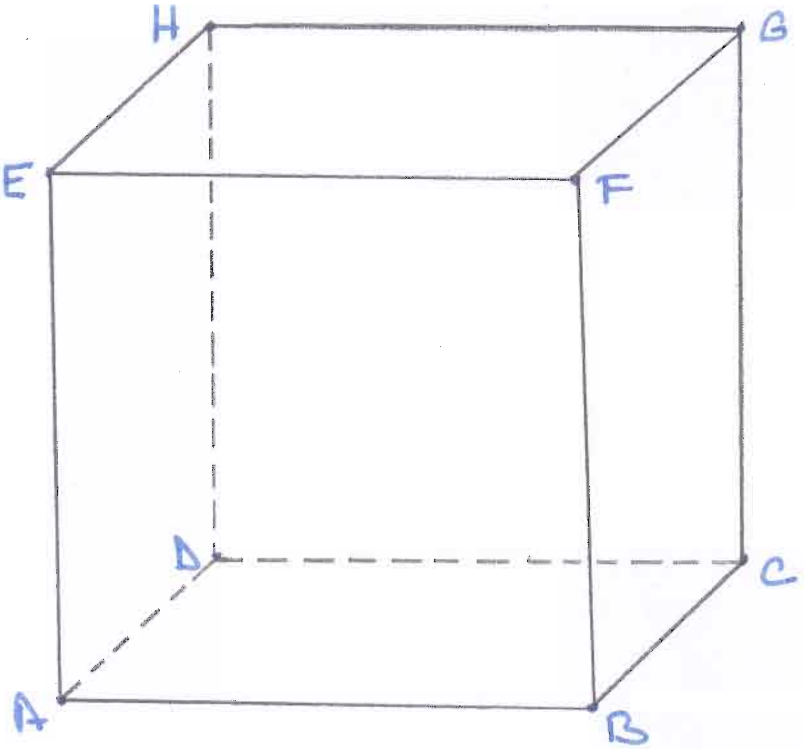
⑤ Un tetraedru regulat ABCD are suma lungimilor tuturor muchiilor egală cu 12 cm. Să se calculeze lungimea $\ell = AB$.

$6 \cdot \ell = 12\text{ cm} \Rightarrow \ell = \frac{12\text{cm}}{6} \Rightarrow \ell = 2\text{cm}$

⑥ În tabel este prezentat numărul de elevi al fiecăreia dintre clasele unei școli. Numărul total al elevilor din clasele a VIII-a al acestei școli este egal cu $30 + 28 = 58$

Subiectul 2

① Desenați un cub ABCDEFGH.



② Arătați că $(1+0,5)\cdot(1-0,5)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{5}{4}$

$$(1+0,5)\cdot(1-0,5)=1^2-(0,5)^2=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=1-\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow (1+0,5)(1-0,5)=\frac{4-1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1^2}{(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow (1+0,5)\cdot(1-0,5)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{5}{4}$$

③ Determinați două numere x și y, dacă se știe că media lor aritmetică este 150 iar raportul dintre cele două numere este $\frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} = 150 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow 2x = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x+2x}{2} = 150 \Rightarrow 3x = 300 \Rightarrow \boxed{x=100}$$

$$\Rightarrow 2\cdot 100 = y \Rightarrow \boxed{y=200}$$

④ Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3$

a) Reprezentați grafic funcția f în sistemul de coordonate xOy.

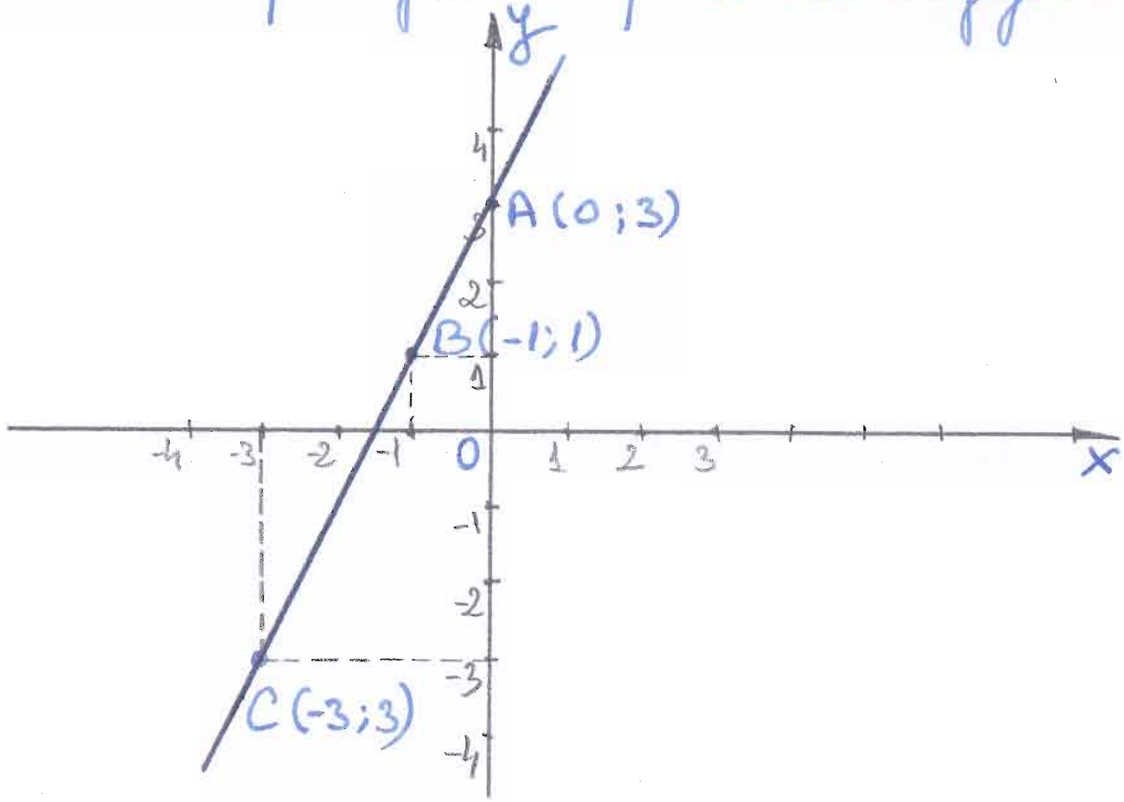
b) Determinați abscisa punctului care aparține graficului funcției f, știind că are abscisa egală cu ordonata.

a) Fie $A(x_0;y_0)$ și $B(x_1;y_1)$ puncte diferite care aparțin graficul funcției.

Fie $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = 2\cdot 0+3 = 3 \Rightarrow A(0;3)$

Fie $x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = f(x_1) = 2\cdot(-1)+3 = 1 \Rightarrow B(-1;1)$

Dreapta reprezentată de punctele A și B reprezintă graficul funcției f în sistemul de coordonate xOy. Graficul este prezentat în figură:



b) fie punctul $C(x_2;y_2) \in d$, unde $d = AB$ = graficul funcției; la care ordonata y_2 este egală cu abscisa x_2 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow y_2 = 2\cdot x_2 + 3 = x_2 \Rightarrow x_2 = -3 \Rightarrow y_2 = -3$$

$$\Rightarrow C(-3;3)$$

⑤ Arătați că următoarea expresie $E(x) = 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R} - \{-5;1;5\}$, unde:

$$E(x) = \frac{(x+2)^2-9}{x^2-25} : \frac{x-1}{x-5}$$

$$E(x) = \frac{(x+2)^2-3^2}{x^2-5^2} \cdot \frac{x-5}{x-1}$$

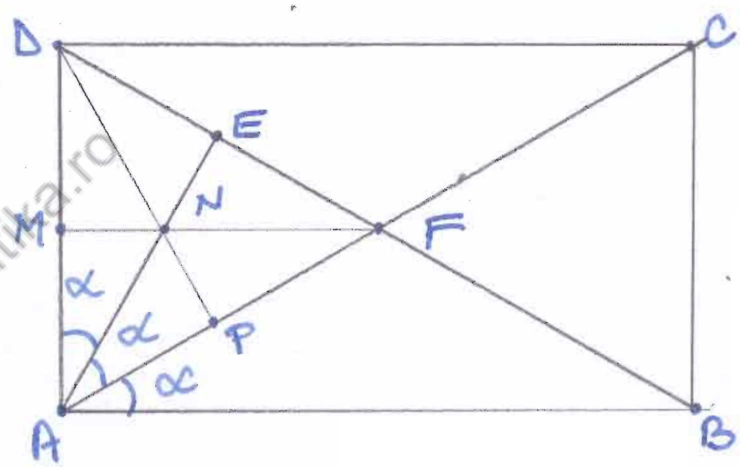
$$E(x) = \frac{[(x+2)-3]\cdot[(x+2)+3]}{(x-5)\cdot(x+5)} \cdot \frac{(x-5)}{(x-1)}$$

$$E(x)=\frac{(x-1)\cdot(x+5)\cdot(x-5)}{(x-5)\cdot(x+5)\cdot(x-1)}, \text{ unde } x\neq 5;\ x\neq -5;\ x\neq 1$$

$E(x)=1,\quad (\forall)\ x\in\mathbb{R}-\{-5;1;5\}$

Subiectul 3

În figura de mai jos este reprezentat un dreptunghi ABCD cu $AB=8\cdot\sqrt{3}$ cm și $AD=8$ cm. Pe segmentul BD se consideră punctele E și F astfel încât $m(\sphericalangle DAE)=m(\sphericalangle EAF)=m(\sphericalangle FAB)$



a) Arătați că perimetrul ABCD este $16\cdot(\sqrt{3}+1)$ cm.
b) Demonstrați că punctele A, F și C sunt coliniare.
c) Dacă $M\in(AD)$, cu $FM\parallel AB$ iar $N=FM\cap AE$, demonstrați că $DN\perp AC$.

Demonstrație

a) Notăm cu P = perimetrul dreptunghiului ABCD. Vom avea

$$\left.\begin{array}{l}P=(AB)+(BC)+(CD)+(DA)\\(AB)=(CD)\\(AD)=(BC)\end{array}\right\}\Rightarrow P=2\cdot(AB+AD)$$

Efectuând calculul numeric, vom obține:

$\mathcal{P} = 2\cdot(8\cdot\sqrt{3}\ cm + 8\ cm)$

$\mathcal{P} = 16\cdot(\sqrt{3}+1)\ cm$

b) Vom considera

$\alpha = m(\sphericalangle DAE) = m(\sphericalangle EAF) = m(\sphericalangle FAB)$

Se știe că $m(\sphericalangle DAB) = 90^\circ$, deoarece ABCD este un dreptunghi $\Rightarrow$

$3\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle BAF) = 30^\circ$ (*)

În triunghiul dreptunghic ABC, cu măsura unghiului $\widehat{ABC} = 90^\circ$, vom avea:

$\operatorname{tg}\widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AB} \Rightarrow \operatorname{tg}\widehat{BAC} = \dfrac{8\ cm}{8\cdot\sqrt{3}\ cm}$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\widehat{BAC} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{tg}\widehat{BAC} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ măsura unghiului $\widehat{BAC}$ este de 30° (**)

Din (*) și (**) va rezulta că $F \in (AC) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ punctele A, F și C sunt coliniare.

c) Se cunoaște faptul că într-un triunghi dreptunghic, care are un unghi de 30°, cateta opusă acestui unghi este egală cu jumătate din ipotenuză (d.p.d.v. a lungimii lor).

$$\left.\begin{array}{l}\text{Punctele } A, F, C \text{ sunt coliniare} \Rightarrow F \in (AC) \\ \text{Punctele } D, F, B \text{ sunt coliniare} \Rightarrow F \in (BD)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$F = (AC) \cap (BD)$

În baza principiului de congruență „catetă-catetă" vom avea: $\triangle DAB \equiv \triangle CBA$ ($DA = CB$ și $AB = BA$)

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow m(\sphericalangle DBA) = 30^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle ADB) = 60^\circ \Rightarrow \\ \Rightarrow m(\sphericalangle ADF) = 60^\circ \\ \\ \text{Se știe că } m(\sphericalangle DAF) = 2 \cdot \alpha = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ în $\triangle DAF$ vom avea $m(\sphericalangle AFD) = 180^\circ - 2 \cdot 60^\circ$

$\Rightarrow m(\sphericalangle AFD) = 60^\circ$

Deci triunghiul DAF este echilateral.

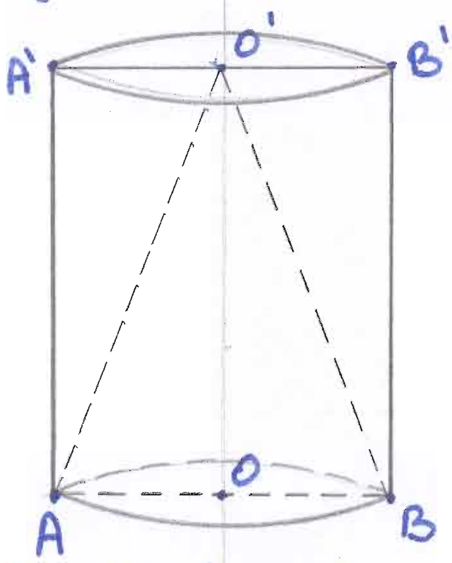
$$\left.\begin{array}{l}AE \text{ este bisectoare în } \triangle DAF \Rightarrow AE \text{ - înălțime} \\ \Rightarrow AE \perp DF \text{ (în punctul } E) \\ \\ \left.\begin{array}{l}FM \parallel AB \\ AB \perp DA\end{array}\right\} \Rightarrow FM \perp DA \text{ (în punctul } M)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow N = FM \cap AE$ este ortocentrul $\triangle DAF$

$\Rightarrow DN \perp AF$ (în punctul P)

② În figura următoare este reprezentat un cilindru circular drept cu generatoarea $AA' = 12$ cm. Segmentul AB este diametrul bazei cilindrului. Se cunoaște că $AB = 10$ cm. Se știe că O' este mijlocul diametrului $A'B'$.

$$\begin{cases} r = AO = A'O' = 5\text{ cm} \\ AB = A'B' = 10\text{ cm} \\ AA' = BB' = 12\text{ cm} \end{cases}$$



a) Arătați că aria laterală a cilindrului este egală cu 120π cm^2

b) Demonstrați că lungimea segmentului $A'B$ este mai mică decât 16 cm.

c) Calculați valoarea sinusului unghiului dintre dreapta AO' și planul uneia dintre bazele cilindrului

Demonstrație

a) Cilindrul este circular drept $\Rightarrow$ bazele sunt cercuri de aceeași rază r.

AB = diametrul $\Rightarrow r = \frac{AB}{2} \Rightarrow r = \frac{10\text{ cm}}{2} = 5$ cm

Aria laterală $= \mathcal{A}$

$\mathcal{A} = (2 \cdot \pi \cdot r) \cdot AA'$

Calcul numeric:

$\mathcal{A} = (2\cdot\pi\cdot 5\,cm)\cdot 12\,cm \Rightarrow \mathcal{A} = 120\cdot\pi\ cm^2$

b) Triunghiul A'AB este dreptunghic în A $\Rightarrow$ aplicăm Teorema lui Pitagora $\Rightarrow$

$A'B^2 = A'A^2 + AB^2 \Rightarrow A'B = \sqrt{A'A^2 + AB^2}$

Efectuând calculul numeric vom obține:

$A'B = \sqrt{(12\,cm)^2 + (10\,cm)^2} = \sqrt{144\,cm^2 + 100\,cm^2}$

$A'B = \sqrt{244\,cm^2} = \sqrt{244}\,cm < \sqrt{256}\,cm = \sqrt{16^2}\,cm$

$A'B < 16\,cm$

c) A'O' este proiecția lui AO' pe planul determinat de baza superioară a cilindrului circular drept $\Rightarrow$ unghiul dintre dreapta AO' și planul determinat de baza superioară este chiar $\widehat{AO'A'}$

În triunghiul dreptunghic AO'A' vom avea $m(\sphericalangle AA'O') = 90^\circ$

$\sin(\widehat{AO'A'}) = \dfrac{AA'}{AO'}$

Teorema Pitagora: $\left.\begin{array}{l} AO'^2 = AA'^2 + A'O'^2 \\ AA' = 12\,cm \\ A'O' = r = 5\,cm \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow AO' = \sqrt{(12\,cm)^2 + (5\,cm)^2} = \sqrt{144\,cm^2 + 25\,cm^2}$

$\Rightarrow AO' = \sqrt{169}\,cm = \sqrt{13^2}\,cm \Rightarrow AO' = 13\,cm$

$\Rightarrow \sin(\widehat{AO'A'}) = \dfrac{12\,cm}{13\,cm} \Rightarrow \sin(\widehat{AO'A'}) = \dfrac{12}{13}$