Rezolvarea testului de evaluare națională ce a fost susținut de elevii claselor a VIII-a în data de 13.VI.2018 la proba scrisă „Matematică".

Subiectul 1

① $30 - 30 : 3 = 30 - 10 = 20$

② Zece caiete de același fel costă 40 lei.
Cinci dintre acestea costă 20 lei.

10 caiete .... 40 lei
5 caiete .... x lei

$\Rightarrow \frac{10}{5} = \frac{40}{x} \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 40}{10} \Rightarrow x = 20$

③ Fie mulțimile:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{1, 3, x\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Atunci numărul $x = 5$.

④ Un trapez are baza mare $B = 12$ cm și baza mică $b = 8$ cm. Lungimea liniei mijlocii L a acestui trapez este:

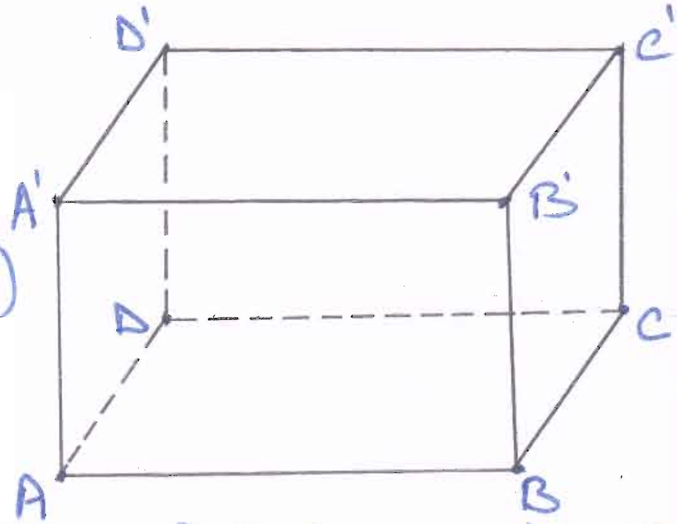
$L = \frac{(B+b)}{2} \Rightarrow L = \frac{12\text{ cm} + 8\text{ cm}}{2}$

$\Rightarrow L = 10\text{ cm}$

Matematika.ro

⑤ În figura următoare este reprezentat un paralelipiped dreptunghic ABCDA'B'C'D' cu lungimile muchiilor: $AB = 10$ cm, $BC = 5$ cm și $AA' = 4$ cm. Volumul acestui paralelipiped este:

$V = AB \cdot BC \cdot AA'$



Numeric:

$V = (10\,cm) \cdot (5\,cm) \cdot (4\,cm)$

$\Rightarrow V = 200\,cm^3$

⑥ În tabelul următor sunt prezentate temperaturile înregistrate la ora 8, la o stație meteo, în fiecare zi a unei săptămâni din luna februarie.

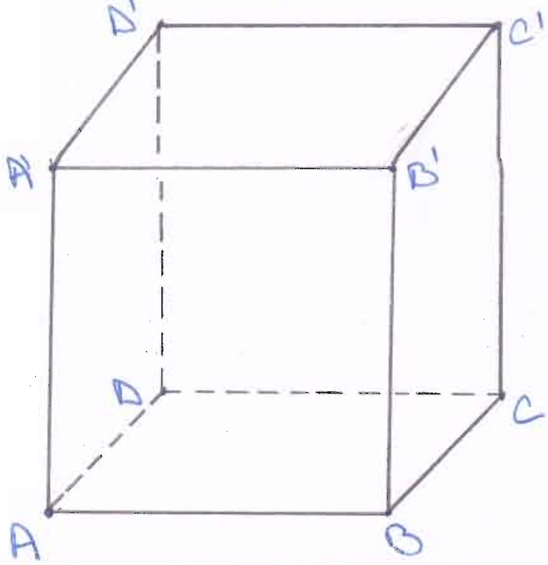
Ziua	Luni	Marți	Mierc.	Joi	Vineri	Sâmb.	Dum.
Temp.(°C)	−1	−8	−10	−3	1	3	5

Conform tabelului, media aritmetică a temperaturilor pozitive este:

$$m_a = \frac{1°C + 3°C + 5°C}{3} \Rightarrow m_a = 3°C$$

Subiectul 2

① Desenați un cub ABCDA'B'C'D'



Matematica.ro

② Arătați că numărul natural N este divizibil cu 17, pentru orice număr $n \in \mathbb{N}$. Se știe că:

$$N = 2^{n+3} - 2^{n+2} + 7 \cdot 2^{n+1} - 2^{n}$$

$$N = 2^{n} \cdot (2^{3} - 2^{2} + 7 \cdot 2^{1} - 2^{0})$$

$$N = 2^{n} \cdot (8 - 4 + 14 - 1)$$

$$N = 2^{n} \cdot 17 \Rightarrow N : 17 = 2^{n} \in \mathbb{N}, (\forall)\, n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ N este divizibil cu 17.

③ Mai mulți elevi vor să cumpere materiale pentru un proiect. Dacă fiecare elev contribuie cu câte 20 lei, mai sunt necesari 20 lei pentru cumpărarea materialelor, iar dacă fiecare elev contribuie cu 25 lei, rămân 5 lei după cumpărarea materialelor. Determinați suma necesară pentru cumpărarea materialelor.

Notăm cu $\begin{cases} x = \text{numărul elevilor} \\ y = \text{suma necesară pentru cumpărarea materialelor} \end{cases}$

$$\begin{cases} x \cdot 20 \text{ lei} = y - 20 \text{ lei} & | \cdot 25 \\ x \cdot 25 \text{ lei} = y + 5 \text{ lei} & | \cdot 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cdot 500 \text{ lei} = y \cdot 25 - 500 \text{ lei} \\ x \cdot 500 \text{ lei} = y \cdot 20 + 100 \text{ lei} \end{cases} \Big| -$$

Matematika.ro

$\Rightarrow 0 = y \cdot 5 - 600$ lei $\Rightarrow y = \frac{600 \text{ lei}}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 120$ lei

4) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 4$

a) Reprezentați grafic funcția f într-un sistem de coordonate xOy

b) În sistemul de coordonate xOy se consideră punctul D(0; -1). Determinați distanța de la punctul D la graficul funcției f.

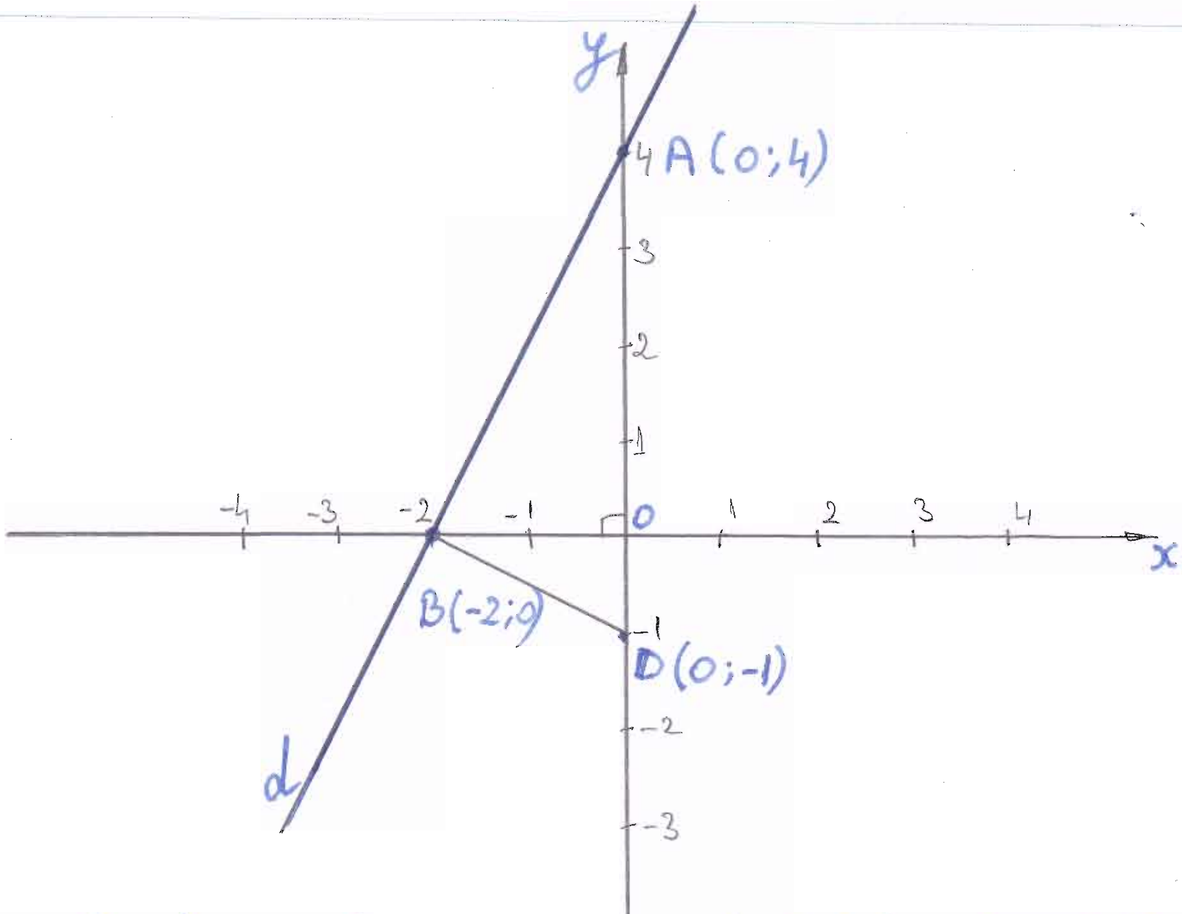
Funcția f este de gradul I $\Rightarrow$ graficul ei va fi reprezentat de o dreaptă în sistemul de coordonate xOy. Se știe faptul că prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una $\Rightarrow$ vom determina convenabil coordonatele a două puncte diferite A și B care aparțin graficul funcției f $\Rightarrow$ graficul funcției va fi dreaptă care trece prin punctele A și B.

Considerăm punctul A de coordonate x_0 și y_0.
Considerăm punctul B de coordonate x_1 și y_1.

Notăm $A(x_0; y_0)$ și $B(x_1; y_1)$

Fie $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = -4 + 4 = 0 \Rightarrow A(-2; 0)$
Fie $x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = f(x_1) = 0 + 4 = 4 \Rightarrow B(0; 4)$

Matematika.ro



Dreapta d care trece prin punctele A(0;4) și B(-2;0) reprezintă graficul funcției f.

b) Unim punctele A, B, D și formăm triunghiul ABD. Aria suprafeței triunghiului ABD o scriem în două moduri diferite

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot (BO) \cdot (AD) \\ \mathcal{A}_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot (AB) \cdot h \end{cases}$$

, unde h = înălțimea de la vârful D la baza AB

$$\Rightarrow h = \frac{(BO) \cdot (AD)}{AB}$$

BO = 2 m , dacă considerăm unitatea de măsură ca fiind „metrul" pe axa absciselor.

AD = 5 m , dacă considerăm unitatea de măsură ca fiind „metrul" pe axa ordonatelor.

Aplicăm Teorema lui Pitagora în triunghiul ABO, care este dreptunghic în O.

$$\left.\begin{array}{l} AB^2 = AO^2 + BO^2 \Rightarrow AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} \\ AO = 4\,m \Rightarrow AB^2 = 16\,m^2 \\ BO = 2\,m \Rightarrow BO^2 = 4\,m^2 \end{array}\right\} \Rightarrow AB = \sqrt{20\,m^2}$$

$$\Rightarrow AB = 2\cdot\sqrt{5}\,m$$

Efectuând calculul numeric, vom obține:

$$h = \frac{2\,m \cdot 5\,m}{2\cdot\sqrt{5}\,m} \Rightarrow h = \frac{5}{\sqrt{5}}\,m \Rightarrow h = \sqrt{5}\,m$$

⑤ Arătați că următoarea expresie $E(x)$ este egală cu $\frac{1}{2}$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R} - \{-3; 3\}$:

$$E(x) = \left(\frac{x+1}{x-3} - \frac{2x^2+3x-3}{x^2-9} + \frac{2x-1}{x+3}\right) : \frac{2x^2-18}{x^2+6x+9} \quad \text{cu } x \neq \pm 3$$

$$E(x) = \left(\frac{x+1}{x-3} - \frac{2x^2+3x-3}{(x-3)\cdot(x+3)} + \frac{2x-1}{x+3}\right) \cdot \frac{x^2+2\cdot3\cdot x+3^2}{2\cdot x^2 - 2\cdot 9}$$

$$E(x) = \left[\frac{(x+1)\cdot(x+3) - (2x^2+3x-3) + (2x-1)\cdot(x-3)}{(x-3)\cdot(x+3)}\right] \cdot \frac{(x+3)^2}{2\cdot(x^2-3^2)}$$

$$E(x) = \frac{x^2+3x+x+3 \cancel{-2x^2} -3x+3 \cancel{+2x^2} -6x-x+3}{(x-3)\cdot(x+3)} \cdot \frac{(x+3)^2}{(x-3)(x+3)} \cdot \frac{1}{2}$$

$$E(x) = \frac{x^2-6x+9}{(x-3)\cdot(x+3)} \cdot \frac{(x+3)}{(x-3)} \cdot \frac{1}{2}$$

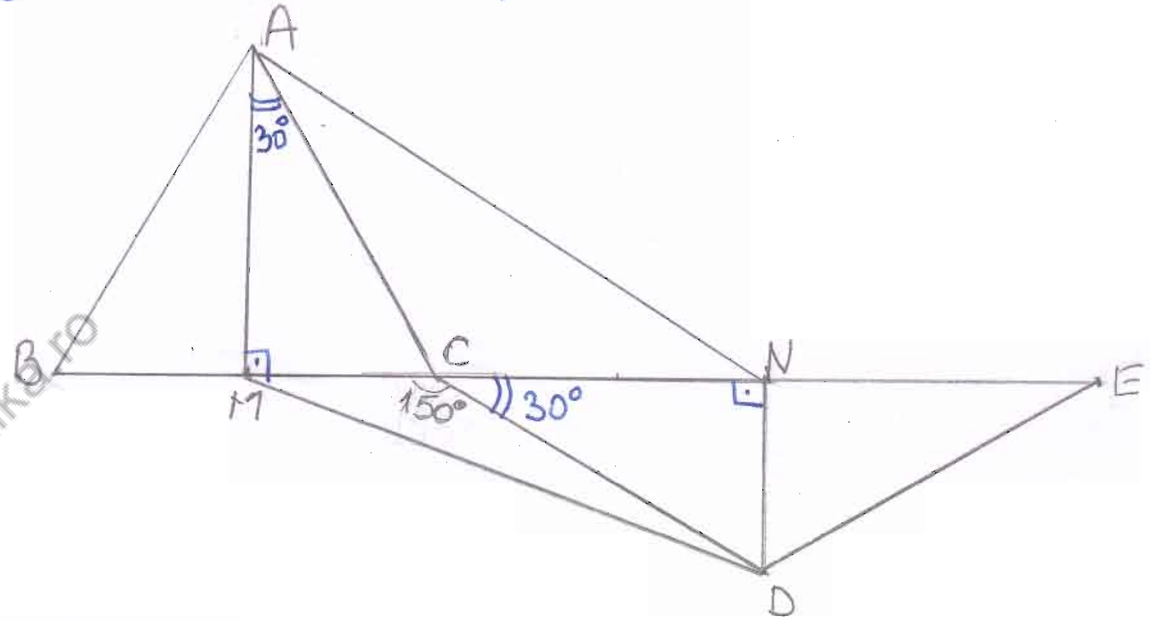
$$E(x) = \frac{x^2 - 2\cdot 3x + 3^2}{(x-3)} \cdot \frac{1}{(x-3)} \cdot \frac{1}{2}$$

$$E(x) = \frac{(x-3)^2}{(x-3)\cdot(x-3)} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow E(x) = \frac{1}{2}, (\forall)\, x \in \mathbb{R} - \{-3; 3\}$$

Matematica.ro

Subiectul 3

① În figura următoare este reprezentat un triunghi echilateral ABC cu AB = 10 cm și un triunghi isoscel CDE, cu CD = DE = 10 cm. Punctul C este situat pe segmentul BE, iar punctele A și D sunt situate de o parte și de alta a dreptei BE, astfel încât $m(\measuredangle BCD) = 150°$. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor BC, respectiv CE



Matematika.ro

a) Arătați că $m(\measuredangle DCE) = 30°$

b) Demonstrați că $\triangle ACM \equiv \triangle CDN$

c) Arătați că $\text{Aria}_{AMDN} < 95\,cm^2$

Demonstrație

a) Se cunoaște faptul că suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct, de aceeași parte a unei drepte este de 180° $\Rightarrow$ putem scrie că:

$$m(\measuredangle BCD) + m(\measuredangle DCE) = 180° \iff$$
$$150° + m(\measuredangle DCE) = 180° \iff$$
$$m(\measuredangle DCE) = 30°.$$

b) M = mijlocul lui $BC \Rightarrow AM$ = mediană în $\triangle ABC$
$\triangle ABC$ = echilateral $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow AM$ este și bisectoare și înălțime $\Rightarrow m(\sphericalangle CAM) = 30^\circ$
și $\triangle AMC$ este dreptunghic în M.

N = mijlocul lui $CE \Rightarrow DN$ = mediană în $\triangle DCE$
$\triangle DCE$ = isoscel, cu $CD = ED$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow DN$ este și bisectoare și înălțime $\Rightarrow \triangle CND$ = dreptunghic
cu $m(\sphericalangle CND) = 90^\circ$

$CD = AC = 10$ cm
$m(\sphericalangle CAM) = m(\sphericalangle DCN) = 30^\circ$
$\triangle AMC$ = dreptunghic, cu AC = ipotenuză
$\triangle CND$ = dreptunghic, cu CD = ipotenuză $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ în baza criteriului de congruență ipotenuză-unghi
$\Rightarrow \triangle ACM \equiv \triangle CDN$.

c) $Aria_{AMDN} = Aria_{\triangle AMN} + Aria_{\triangle DNM}$

$$\left.\begin{array}{l} Aria_{\triangle AMN} = \dfrac{AM \cdot MN}{2} \\ \\ Aria_{\triangle DNM} = \dfrac{DN \cdot MN}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow Aria_{AMDN} = \frac{MN}{2} \cdot (AM + DN)$$

$AB = BC = AC = CD = DE = \ell = 10$ cm
$BM = CM = \dfrac{\ell}{2} = 5$ cm
$\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$;

Matematika.ro

În $\triangle AMC$, avem:

$$\left.\begin{array}{l} \cos(\sphericalangle CAM) = \dfrac{AM}{AC} \\ m(\sphericalangle CAM) = 30^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow \boxed{AM = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot \ell}$$

La punctul b) s-a demonstrat că $\triangle AMC \equiv \triangle CND$
$\Rightarrow CN = AM \Rightarrow CN = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot \ell$

$$MN = MC + CN \Rightarrow MN = \frac{\ell}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot \ell \Rightarrow \boxed{MN = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\cdot \ell}$$

În $\triangle CND$, avem:

$$\left.\begin{array}{l} \sin(\sphericalangle NCD) = \dfrac{DN}{CD} \\ m(\sphericalangle NCD) = 30^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{DN}{CD} \Rightarrow \boxed{DN = \frac{1}{2}\cdot \ell}$$

Matematika.ro

Vom avea:

$$Aria_{AMDN} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\cdot \ell\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot \ell + \frac{1}{2}\cdot \ell\right)$$

$$Aria_{AMDN} = \frac{1}{8}\cdot(1+\sqrt{3})^2\cdot \ell^2$$

Numeric, vom avea:

$$Aria_{AMDN} = \frac{1}{8}\cdot(1+\sqrt{3})^2\cdot(10\,cm)^2$$

$$Aria_{AMDN} = \frac{25}{2}\cdot(1+\sqrt{3})^2\,cm^2 = \frac{25}{2}\cdot(1+2\cdot\sqrt{3}+3)\,cm^2$$

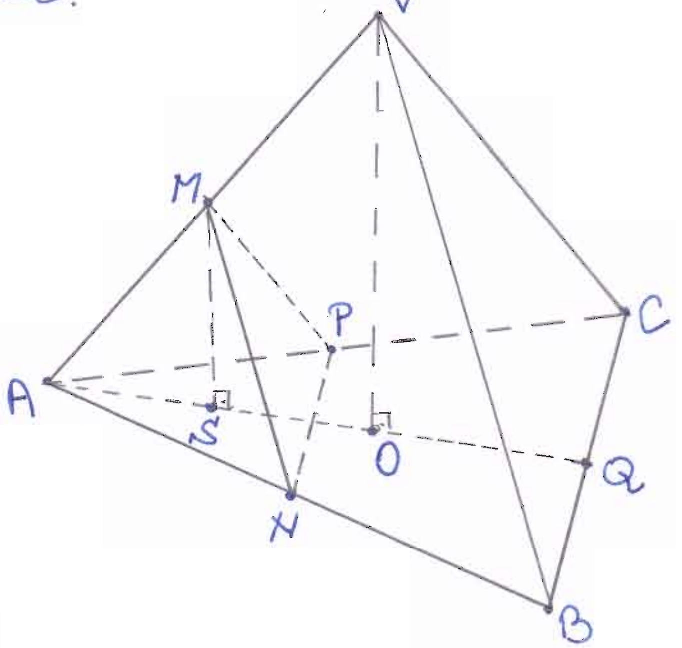
$$Aria_{AMDN} = \frac{25}{2}\cdot(4+2\cdot\sqrt{3})\,cm^2 \Rightarrow Aria_{AMDN} = 25\cdot(2+\sqrt{3})\,cm^2$$

Se cunoaște faptul că $\sqrt{3} < 1,74 \Rightarrow$ vom avea :

$Aria_{AMDN} = 25 \cdot (2+\sqrt{3})cm^2 < 25 \cdot (2+1,74)cm^2 = 93,5\,cm^2$

$\Rightarrow \boxed{Aria_{AMDN} < 95\,cm^2}$

② În figura următoare este reprezentată o piramidă regulată VABC cu AB = 12 cm și VO = 8 cm, unde O este centrul cercului circumscris bazei ABC. Punctele M, N, P și Q sunt mijloacele segmentelor VA, AB, AC și BC.



Concluzie

a) Arătați că perimetrul bazei ABC este egal cu 36 cm.

b) Demonstrați că VQ ‖ (MNP)

c) Determinați numărul $p \in \mathbb{R}$, știind că $V_{MANP} = (p\%) \cdot V_{VABC}$

Demonstrație

a) $P_{ABC} = AB + BC + AC$

Piramida VABC este regulată $\Rightarrow$ laturile bazei sunt congruente $\Rightarrow AB = BC = AC = \ell = 12\,cm$

$\Rightarrow P_{ABC} = 3 \cdot \ell \Rightarrow P_{ABC} = 3 \cdot (12 cm) \Rightarrow P_{ABC} = 36 cm.$

b) $\left.\begin{array}{l} M = \text{mijlocul lui } AV \\ N = \text{mijlocul lui } AB \end{array}\right\} \Rightarrow MN$ = linie mijlocie în $\triangle AVB$

$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow MN \parallel VB \\ \text{În mod analogic se arată că } MP \parallel VC \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ planele (NMP) și (BVC) sunt paralele $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $(\forall)$ dreaptă $d \subset (BVC)$ este paralelă cu (NMP)

$VQ \subset (BVC) \Rightarrow VQ \parallel (MPN)$

c) $AB = BC = AC = \ell = 12 cm$

$AN = NP = AP = \frac{\ell}{2} = 6 cm$

$VO = h = 8 cm$

$VS = \frac{h}{2} = 4 cm$

$$\left\{\begin{array}{l} V_{MANP} = (VS) \cdot \mathcal{A}_{\triangle ANP} \cdot \frac{1}{3} = \frac{h}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \sin 60^\circ\right) \cdot \frac{1}{3} \\ V_{VABC} = (VO) \cdot \mathcal{A}_{\triangle ABC} \cdot \frac{1}{3} = h \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \ell \cdot \sin 60^\circ\right) \cdot \frac{1}{3} \end{array}\right| :$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{V_{MANP}}{V_{VABC}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\% \\ \frac{V_{MANP}}{V_{VABC}} = p\% \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{p = 12{,}5}$

Matematika.ro

S-au ținut cont de următoarele:

$AB = BC = AC = l$

$VA = VB = VC = L$

$VO = h$ = înălțimea piramidei regulate VABC

N, P, M sunt mijloacele segmentelor (AB), (AC), (AV)
$\Rightarrow AN = \frac{l}{2}$; $AP = \frac{l}{2}$; $NP = \frac{BC}{2} = \frac{l}{2}$ (fiind linie mijlocie în $\triangle ABC$ $\Rightarrow$ $\boxed{\triangle ANP = \text{echilateral}}$

$\Rightarrow MA = \frac{L}{2}$; $MN = \frac{VB}{2} = \frac{L}{2}$ (fiind linie mijlocie în $\triangle AVB$); $MP = \frac{VC}{2} = \frac{L}{2}$ (fiind linie mijlocie în $\triangle AVC$ $\Rightarrow$ $\boxed{MA = MN = MP}$

$\Rightarrow$ MANP = piramidă triunghiulară regulată.

Fie S = centrul cercului circumscris bazei ANP $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ MS = înălțimea piramidei regulate MANP.

$\left.\begin{array}{l} O \in \text{bisectoarea } \measuredangle BAC \\ S \in \text{bisectoarea } \measuredangle NAP \\ AQ = \text{bisectoarea } \measuredangle BAC \end{array}\right\} \Rightarrow A, S, O, Q = \text{coliniare.}$

$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} MS \perp AQ \\ VO \perp AQ \end{array}\right\} \Rightarrow MS \parallel VO \\ M = \text{mijlocul lui } AV \end{array}\right\} \Rightarrow MS = \text{linie mijlocie în } \triangle AVO \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{MS = \frac{VO}{2} = \frac{h}{2}}$

Matematika.ro